Neúplné sportovní turnaje

Magické ohodnocování $(n-5)$, $(n-7)$ a $(n-9)$-pravidelných grafů

Augustin Žídek

augustin@zidek.eu

15. června 2012

Proč jsou Mistrovství světa a Olympijské hry **nespravedlivé**

- Není čas (a peníze) na všechny zápasy

Proč jsou Mistrovství světa a Olympijské hry **nespravedlivé**

- Není čas (a peníze) na všechny zápasy, je třeba některé vynechat

Proč jsou Mistrovství světa a Olympijské hry **nespravedlivé**

- Není čas (a peníze) na všechny zápasy, je třeba některé vynechat
- Pro 80 týmů by kompletní turnaj stál při ceně 100,000 Kč za zápas **316,000,000 Kč** (hrálo by se 3160 zápasů)

Proč jsou Mistrovství světa a Olympijské hry **nespravedlivé**

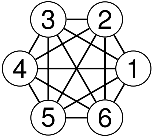
- Není čas (a peníze) na všechny zápasy, je třeba některé vynechat
- Pro 80 týmů by kompletní turnaj stál při ceně 100,000 Kč za zápas **316,000,000 Kč** (hrálo by se 3160 zápasů)
- Šance týmu jsou dány skupinou

Proč jsou Mistrovství světa a Olympijské hry **nespravedlivé**

- Není čas (a peníze) na všechny zápasy, je třeba některé vynechat
- Pro 80 týmů by kompletní turnaj stál při ceně 100,000 Kč za zápas **316,000,000 Kč** (hrálo by se 3160 zápasů)
- Šance týmu jsou dány skupinou
- Co když je tým náhodou v nesprávné skupině?

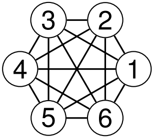
Motivace: Neúplné sportovní turnaje

- Úplný turnaj: každý hraje s každým – fuj, to je zápasů

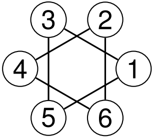


Motivace: Neúplné sportovní turnaje

- Úplný turnaj: každý hraje s každým – fuj, to je zápasů



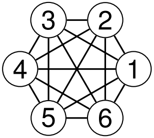
- Jak na spravedlivý turnaj, kde nehraje každý s každým



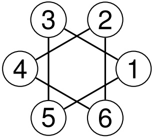
Nespravedlivý neúplný turnaj

Motivace: Neúplné sportovní turnaje

- Úplný turnaj: každý hraje s každým – fuj, to je zápasů



- Jak na spravedlivý turnaj, kde nehraje každý s každým



Nespravedlivý neúplný turnaj

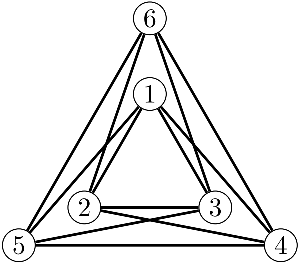
- Spravedlivý neúplný turnaj: Pravidelný neúplný graf, magicky ohodnocený

Magické ohodnocení grafů

- Součet vah sousedních vrcholů je stejný pro každý vrchol

Magické ohodnocení grafů

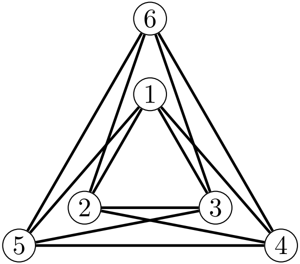
- Součet vah sousedních vrcholů je stejný pro každý vrchol
- Například pro $n = 6, r = 4$



4-pravidelný graf na 6 vrcholech

Magické ohodnocení grafů

- Součet vah sousedních vrcholů je stejný pro každý vrchol
- Například pro $n = 6, r = 4$



4-pravidelný graf na 6 vrcholech

- Magická konstanta m_k (váha každého vrcholu):

$$w(i) = m_k = \frac{(n+1)r}{2}$$

Jak se magické grafy hledají

Jak se magické grafy hledají

- Těžko

Jak se magické grafy hledají

- Těžko
- Vysoká algoritmická časová složitost

Jak se magické grafy hledají

- Těžko
- Vysoká algoritmická časová složitost
- Analyticky dobře jdou: Velmi řídké (magicky) nebo velmi husté (antimagicky) grafy

Striktně antimagické grafy

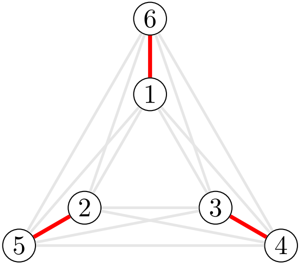
- Husté grafy se vyplatí konstruovat pomocí doplňkových grafů

Striktně antimagické grafy

- Husté grafy se vyplatí konstruovat pomocí doplňkových grafů
- Zajímáme se o „nesoupeře“

Striktně antimagické grafy

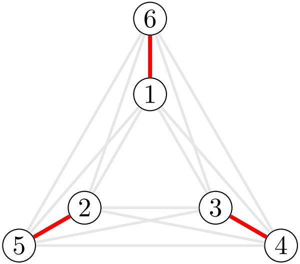
- Husté grafy se vyplatí konstruovat pomocí doplňkových grafů
- Zajímáme se o „nesoupeře"
- Například:



1-pravidlný striktně **antimagický** graf na 6 vrcholech

Striktně antimagické grafy

- Husté grafy se vyplatí konstruovat pomocí doplňkových grafů
- Zajímáme se o „nesoupeře“
- Například:



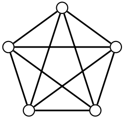
1-pravidlný striktně **antimagický** graf na 6 vrcholech

- Váha vrcholu:

$$w(i) = \frac{(n+1)(n-r)}{2} - i$$

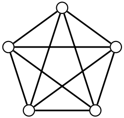
Konstrukce $(n-5)$-pravidelných grafů

- Komponenta K_5

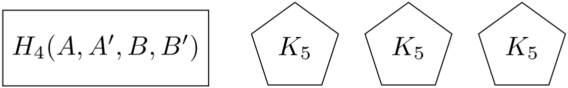


Konstrukce $(n-5)$-pravidelných grafů

- Komponenta K_5



- Komponenta $H_4(A, A', B, B')$ + komponenty K_5



Kotzigova matice

A	P	A'	B	B'
1	**2**	3	4	5
10	**8**	6	9	7
13	**14**	15	11	12

Kotzigova matice

A	P	A'	B	B'
1	**2**	3	4	5
10	**8**	6	9	7
13	**14**	15	11	12

Věta 1 (Pomocná): V žádném sloupci kromě P nebudou dva vrcholy se součtem $n+1$.

Kotzigova matice

A	P	A'	B	B'
1	**2**	3	4	5
10	**8**	6	9	7
13	**14**	15	11	12

Věta 1 (Pomocná): V žádném sloupci kromě P nebudou dva vrcholy se součtem $n + 1$.

Důkaz.

Mají-li dva vrcholy součet $6k + 4$, musí mít zbývající vrchol hodnotu $3k + 2$. Vzhledem k tomu, že v Trojcyklové matici je každé číslo 1 až $6k + 3$ použito právě jednou, bude se tento součet vyskytovat jen v jednom trojcyklu, konkrétně v trojcyklu P. □

A	P	A'	B	B'
1	2	3	4	5
10	8	6	9	7
13	14	15	11	12

A	P	A'	B	B'
1	2	3	4	5
10	8	6	9	7
13	14	15	11	12

Věta 2 (Mocná): Dávají-li dvě čísla, jedno ze sloupce A a druhé ze sloupce A' součet $n+1$, potom dávají stejný součet i dvě zbývající dvojice čísel z těchto sloupců.

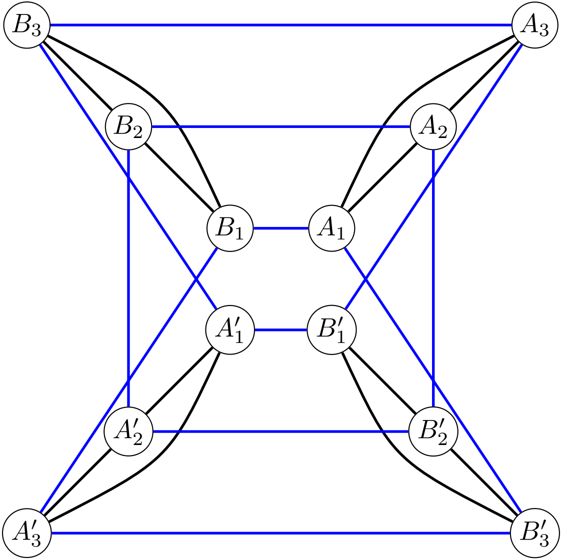
A	P	A'	B	B'
1	2	3	4	5
10	8	6	9	7
13	14	15	11	12

Věta 2 (Mocná): Dávají-li dvě čísla, jedno ze sloupce A a druhé ze sloupce A' součet $n+1$, potom dávají stejný součet i dvě zbývající dvojice čísel z těchto sloupců.

Důkaz.

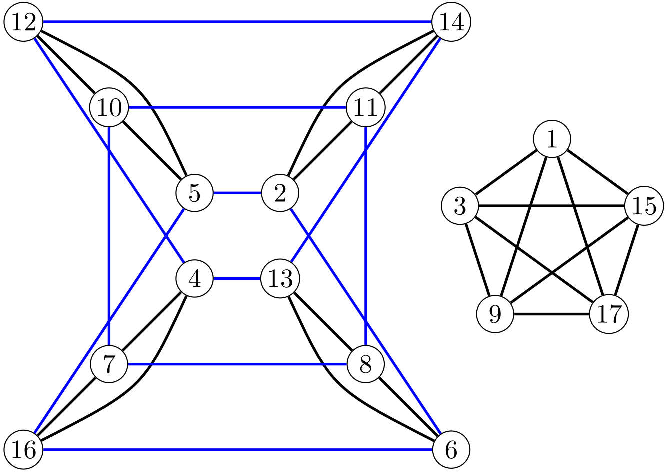
Zaměřme se na levou část Trojcyklové matice, tedy $i \leq k+1$. Označme A i-tý sloupec a A' $(k+2-i)$-tý sloupec matice. Poté pro součet čísel z prvního a třetího řádku v trojcyklech A a A' platí $i + ((5k+2) + (k+2-i)) = 6k+4$. Pro čísla z druhých řádků trojcyklů A a A' platí $(4k+4-2i) + (4k+4-2(k+2-i)) = 6k+4$. Pokud je počet sloupců v levé části matice lichý, bude zde trojcyklus P, který neuvažujeme. Tím pádem věta 2 platí pro levou část matice.
Zaměřme se na pravou část Trojcyklové matice, tedy $i \geq k+2$. Označme B i-tý sloupec a B' $(3k+3-i)$-tý sloupec matice. Poté pro součet čísel z prvního a třetího řádku v trojcyklech B a B' platí $i + (3k+1+(3k+3-i)) = 6k+4$. Pro čísla z druhých řádků trojcyklů B a B' platí $(6k+5-2i) + (6k+5-2(3k+3-i)) = 6k+4$. Pokud je počet sloupců v pravé části matice lichý, bude zde trojcyklus P, který neuvažujeme. Tím pádem věta 2 platí i pro pravou část matice. $\square$

Komponenta $H_4(A, A', B, B'))$



$H_4(A, A', B, B')$ — 4-pravidelná striktně antimagická komponenta na 12 vrcholech

Ukázka konstrukce



4-pravidelný striktně antimagický graf na 17 vrcholech

Nejmenší možné grafy z $(n-5)$-pravidelných

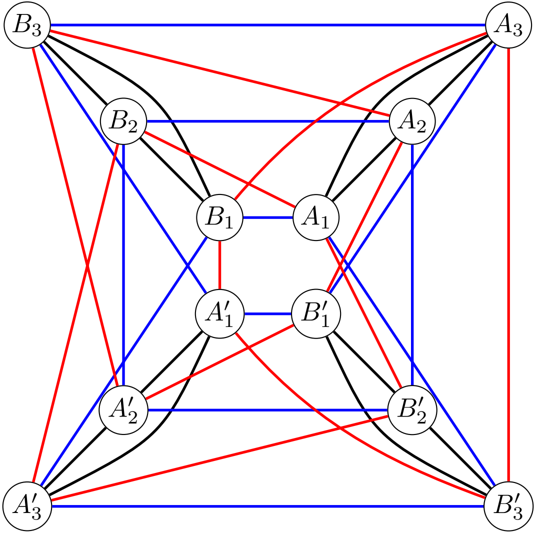
Třída	Nejmenší graf	Struktura
12k+1	20-pravidelný na 25 vrcholech	5 K_5
12k+3	10-pravidelný na 15 vrcholech	3 K_5
12k+5	12-pravidelný na 17 vrcholech	$H_4 + K_5$
12k+7	50-pravidelný na 55 vrcholech	11 K_5
12k+9	40-pravidelný na 45 vrcholech	9 K_5
12k+11	30-pravidelný na 35 vrcholech	7 K_5

Nejmenší možné grafy z $(n-5)$-pravidelných

Třída	Nejmenší graf	Struktura
12k+1	20-pravidelný na 25 vrcholech	5 K_5
12k+3	10-pravidelný na 15 vrcholech	3 K_5
12k+5	12-pravidelný na 17 vrcholech	$H_4 + K_5$
12k+7	50-pravidelný na 55 vrcholech	11 K_5
12k+9	40-pravidelný na 45 vrcholech	9 K_5
12k+11	30-pravidelný na 35 vrcholech	7 K_5

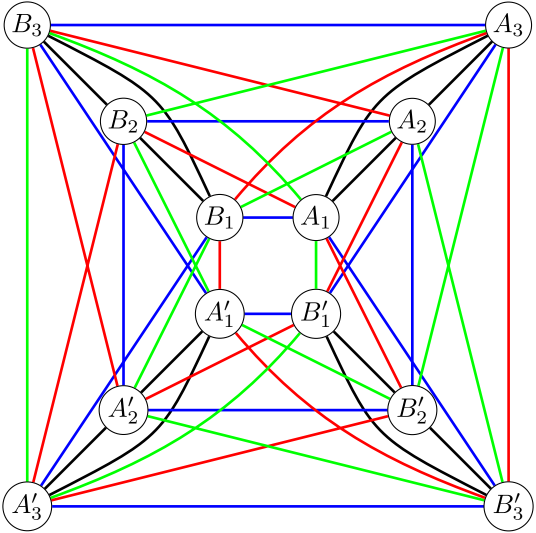
- Zbývající grafy nalezeny buď počítačem, nebo jinou konstrukcí

$(n-7)$-pravidelné grafy



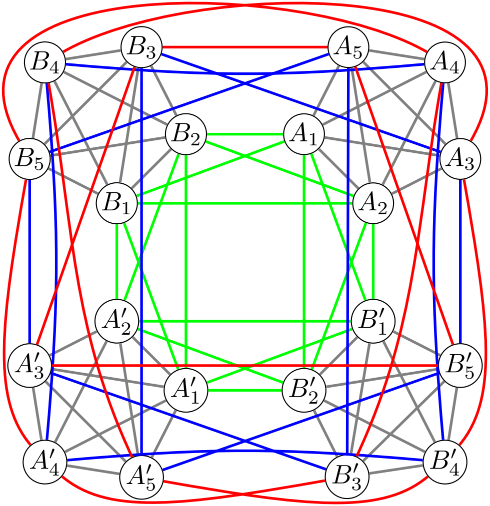
$H_6(A, A', B, B')$ — 6-pravidelná striktně antimagická komponenta na 12 vrcholech

$(n-9)$-pravidelné grafy



$H_8(A, A', B, B')$ — 8-pravidelná striktně antimagická komponenta na 12 vrcholech

$(n-9)$-pravidelné grafy



$H_8(A, A', B, B')$ – 8-pravidelná striktně antimagická komponenta na 20 vrcholech

Zbývalo (nedávno) vyřešit

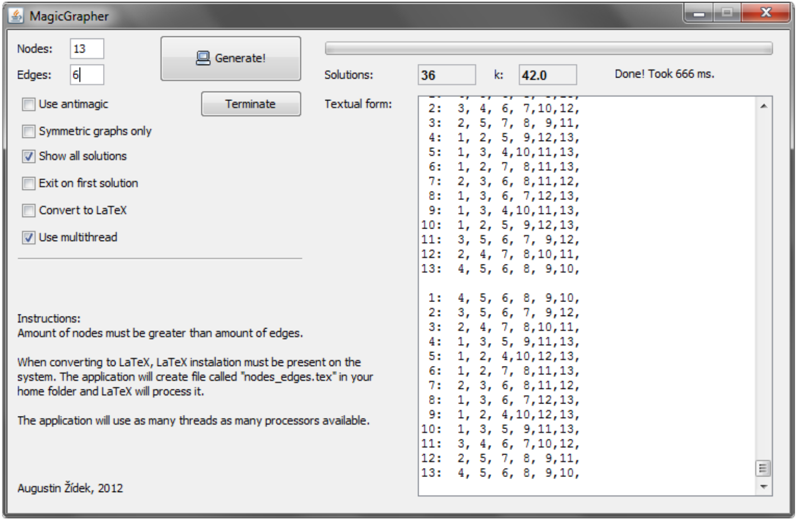
Třída	Pravidelnost	Vrcholy	Nalezeno?
$12k+7$	14	19	Počítačem
	26	31	Počítačem, $K_5 + G_{16}(3-11, 13-19)$
	38	43	Konstrukcí A
$12k+9$	16	21	Počítačem, $3K_5 + 7-11, 13-15, 17-19, 21-25$
	28	33	Konstrukcí A
$12k+11$	18	23	Počítačem, Konstrukcí A
$12k+1$	6	13	Počítačem
	18	25	Počítačem
	30	37	Konstrukcí A
$12k+3$	8	15	Počítačem
	20	27	Konstrukcí A
	32	39	$3K_7 + G_{18}(11-19, 21-29)$
	44	51	Konstrukcí A
$12k+5$	10	17	Počítačem
	22	29	Počítačem
	34	41	Konstrukcí A
	46	53	$5K_7 + G_{18}(18-26, 28-36)$
	58	65	$7K_7 + G_{16}(25-32, 34-41)$
$12k+11$	16	23	Počítačem
$20k+3$	14	23	Počítačem
	34	43	Úpravou obecné konstrukce
$20k+5$	16	25	Počítačem
$20k+11$	2	11	Počítačem
	22	31	Počítačem
$20k+13$	4	13	Počítačem
$20k+15$	6	15	Počítačem
	26	35	Úpravou obecné konstrukce
$20k+17$	8	17	Počítačem
$20k+19$	10	19	Počítačem

Zbývá vyřešit (odměna a sláva čeká. . .)

Jedná se o $(n-11)$-pravidelné grafy

Třída	Pravidelnost	Vrcholy	Nalezeno?
$20k+1$	10	21	Počítačem
	30	41	Ne
$20k+3$	12	23	Počítačem
	32	43	Ne
$20k+5$	14	25	Počítačem
	34	45	Ne
	54	65	Ne
$20k+7$	16	27	Ne
$20k+9$	18	29	Ne
	38	49	Ne
$20k+17$	26	37	Ne

MagicGrapher



Výsledky

- Pro $(n-5,7,9)$-pravidelné grafy vyřešeno pro **všechny** případy

Výsledky

- Pro $(n-5,7,9)$-pravidelné grafy vyřešeno pro **všechny** případy
- Pro $(n-11)$-pravidelné grafy vyřešeno až na 10 případů

Výsledky

- Pro $(n-5,7,9)$-pravidelné grafy vyřešeno pro **všechny** případy
- Pro $(n-11)$-pravidelné grafy vyřešeno až na 10 případů
- Článek do odborného matematického časopisu

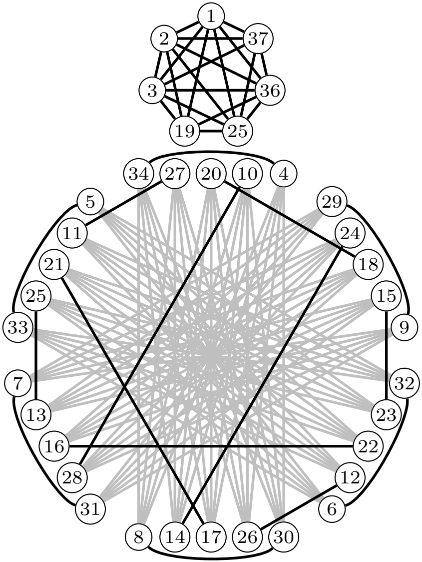
Výsledky

- Pro $(n-5,7,9)$-pravidelné grafy vyřešeno pro **všechny** případy
- Pro $(n-11)$-pravidelné grafy vyřešeno až na 10 případů
- Článek do odborného matematického časopisu
- Zobecnění konstrukce na $(n-(2k+1))$-pravidelné grafy?

Výsledky

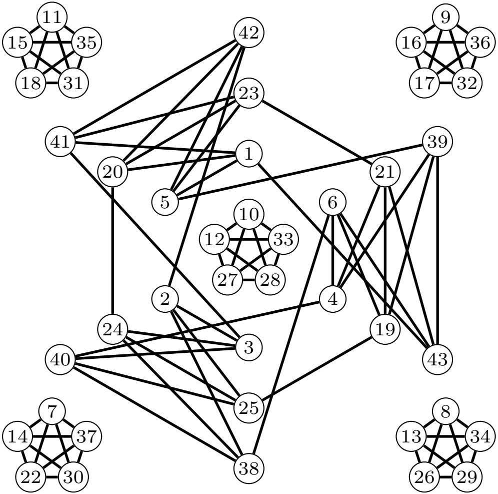
- Pro $(n-5, 7, 9)$-pravidelné grafy vyřešeno pro **všechny** případy
- Pro $(n-11)$-pravidelné grafy vyřešeno až na 10 případů
- Článek do odborného matematického časopisu
- Zobecnění konstrukce na $(n-(2k+1))$-pravidelné grafy?
- Použití při LOH 2016?

Ukázka speciálního případu



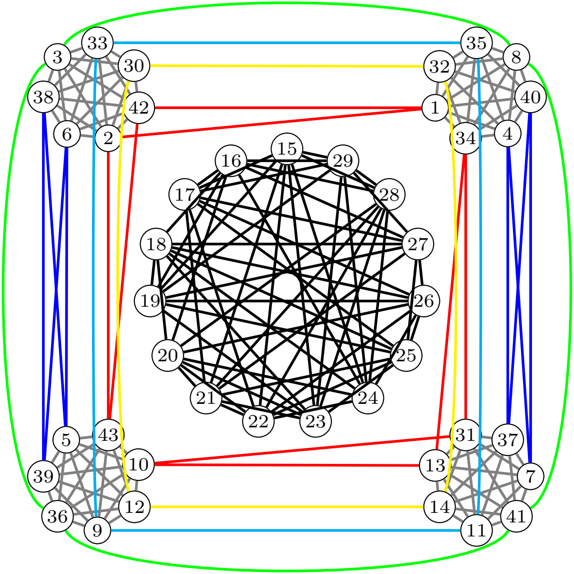
6-pravidelný striktně antimagický graf na 37 vrcholech

2. Ukázka speciálního případu



4-pravidelný striktně antimagický graf na 43 vrcholech

3. Ukázka speciálního případu



8-pravidelný striktně antimagický graf na 43 vrcholech

Diskuse, otázky, řešení?

augustin@zidek.eu

Děkuji za pozornost