

Neúplné sportovní turnaje

Magické ohodnocování $(n - 5)$, $(n - 7)$ a $(n - 9)$ -pravidelných grafů

Augustin Žídek

augustin@zidek.eu

15. června 2012

Proč jsou Mistrovství světa a Olympijské hry **nespravedlivé**

- ▶ Není čas (a peníze) na všechny zápasy

Proč jsou Mistrovství světa a Olympijské hry **nespravedlivé**

- ▶ Není čas (a peníze) na všechny zápasy, je třeba některé vynechat

Proč jsou Mistrovství světa a Olympijské hry nespravedlivé

- ▶ Není čas (a peníze) na všechny zápasy, je třeba některé vynechat
- ▶ Pro 80 týmů by kompletní turnaj stál při ceně 100,000 Kč za zápas **316,000,000 Kč** (hrálo by se 3160 zápasů)

Proč jsou Mistrovství světa a Olympijské hry nespravedlivé

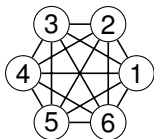
- ▶ Není čas (a peníze) na všechny zápasy, je třeba některé vynechat
- ▶ Pro 80 týmů by kompletní turnaj stál při ceně 100,000 Kč za zápas **316,000,000 Kč** (hrálo by se 3160 zápasů)
- ▶ Šance týmu jsou dány skupinou

Proč jsou Mistrovství světa a Olympijské hry nespravedlivé

- ▶ Není čas (a peníze) na všechny zápasy, je třeba některé vynechat
- ▶ Pro 80 týmů by kompletní turnaj stál při ceně 100,000 Kč za zápas **316,000,000 Kč** (hrálo by se 3160 zápasů)
- ▶ Šance týmu jsou dány skupinou
- ▶ Co když je tým náhodou v nesprávné skupině?

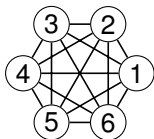
Motivace: Neúplné sportovní turnaje

- ▶ Úplný turnaj: každý hraje s každým – fuj, to je zápasů

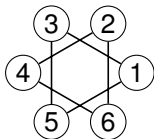


Motivace: Neúplné sportovní turnaje

- ▶ Úplný turnaj: každý hraje s každým – fuj, to je zápasů



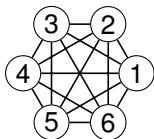
- ▶ Jak na spravedlivý turnaj, kde nehraje každý s každým



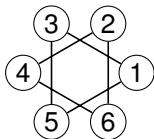
Nespravedlivý neúplný turnaj

Motivace: Neúplné sportovní turnaje

- ▶ Úplný turnaj: každý hraje s každým – fuj, to je zápasů



- ▶ Jak na spravedlivý turnaj, kde nehraje každý s každým



Nespravedlivý neúplný turnaj

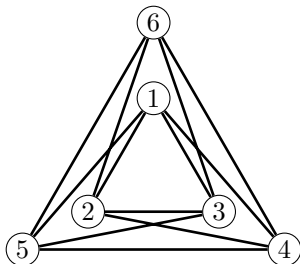
- ▶ Spravedlivý neúplný turnaj: Pravidelný neúplný graf, magicky ohodnocený

Magické ohodnocení grafů

- ▶ Součet vah sousedních vrcholů je stejný pro každý vrchol

Magické ohodnocení grafů

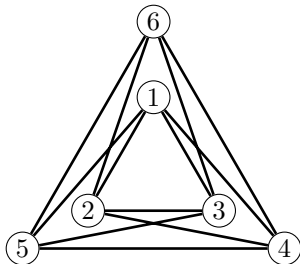
- ▶ Součet vah sousedních vrcholů je stejný pro každý vrchol
- ▶ Například pro $n = 6, r = 4$



4-pravidelný graf na 6 vrcholech

Magické ohodnocení grafů

- ▶ Součet vah sousedních vrcholů je stejný pro každý vrchol
- ▶ Například pro $n = 6, r = 4$



4-pravidelný graf na 6 vrcholech

- ▶ Magická konstanta m_k (váha každého vrcholu):

$$w(i) = m_k = \frac{(n+1)r}{2}$$

Jak se magické grafy hledají

Jak se magické grafy hledají

- ▶ Těžko

Jak se magické grafy hledají

- ▶ Těžko
- ▶ Vysoká algoritmická časová složitost

Jak se magické grafy hledají

- ▶ Těžko
- ▶ Vysoká algoritmická časová složitost
- ▶ Analyticky dobře jdou: Velmi řídké (magicky) nebo velmi husté (antimagicky) grafy

Striktně antimagické grafy

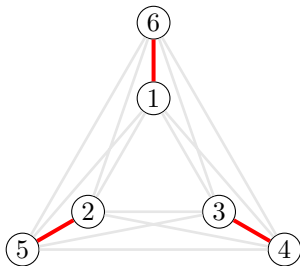
- ▶ Husté grafy se vyplatí konstruovat pomocí doplňkových grafů

Striktně antimagické grafy

- ▶ Husté grafy se vyplatí konstruovat pomocí doplňkových grafů
- ▶ Zajímáme se o „nesoupeře“

Striktně antimagické grafy

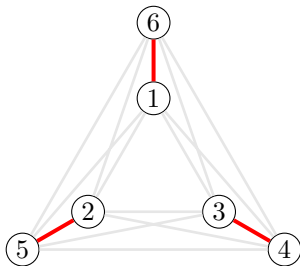
- ▶ Husté grafy se vyplatí konstruovat pomocí doplňkových grafů
- ▶ Zajímáme se o „nesoupeře“
- ▶ Například:



1-pravidlný striktně **antimagický** graf na 6 vrcholech

Striktně antimagické grafy

- ▶ Husté grafy se vyplatí konstruovat pomocí doplňkových grafů
- ▶ Zajímáme se o „nesoupeře“
- ▶ Například:



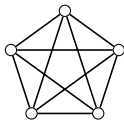
1-pravidlný striktně **antimagický** graf na 6 vrcholech

- ▶ Váha vrcholu:

$$w(i) = \frac{(n+1)(n-r)}{2} - i$$

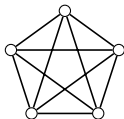
Konstrukce $(n - 5)$ -pravidelných grafů

- ▶ Komponenta K_5

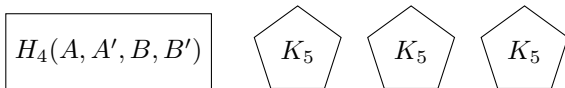


Konstrukce $(n - 5)$ -pravidelných grafů

- ▶ Komponenta K_5



- ▶ Komponenta $H_4(A, A', B, B')$ + komponenty K_5



Kotzigova matice

A	P	A'	B	B'
1	2	3	4	5
10	8	6	9	7
13	14	15	11	12

Kotzigova matice

A	P	A'	B	B'
1	2	3	4	5
10	8	6	9	7
13	14	15	11	12

Věta 1 (Pomocná): V žádném sloupci kromě P nebudou dva vrcholy se součtem $n + 1$.

Kotzigova matice

A	P	A'	B	B'
1	2	3	4	5
10	8	6	9	7
13	14	15	11	12

Věta 1 (Pomocná): V žádném sloupci kromě P nebudou dva vrcholy se součtem $n + 1$.

Důkaz.

Mají-li dva vrcholy součet $6k + 4$, musí mít zbývající vrchol hodnotu $3k + 2$. Vzhledem k tomu, že v Trojcyklové matici je každé číslo 1 až $6k + 3$ použito právě jednou, bude se tento součet vyskytovat jen v jednom trojcyklu, konkrétně v trojcyklu P . □

A	P	A'	B	B'
1	2	3	4	5
10	8	6	9	7
13	14	15	11	12

A	P	A'	B	B'
1	2	3	4	5
10	8	6	9	7
13	14	15	11	12

Věta 2 (Mocná): Dávají-li dvě čísla, jedno ze sloupce A a druhé ze sloupce A' součet $n + 1$, potom dávají stejný součet i dvě zbývající dvojice čísel z těchto sloupců.

A	P	A'	B	B'
1	2	3	4	5
10	8	6	9	7
13	14	15	11	12

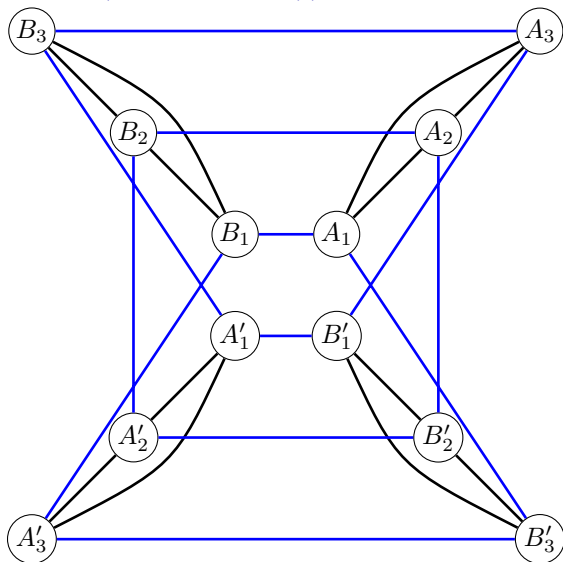
Věta 2 (Mocná): Dávají-li dvě čísla, jedno ze sloupce A a druhé ze sloupce A' součet $n + 1$, potom dávají stejný součet i dvě zbývající dvojice čísel z těchto sloupců.

Důkaz.

Zaměříme se na levou část Trojcyklové matice, tedy $i \leq k + 1$. Označme A i -tý sloupec a A' $(k + 2 - i)$ -tý sloupec matice. Poté pro součet čísel z prvního a třetího řádku v trojcyklech A a A' platí $i + ((5k + 2) + (k + 2 - i)) = 6k + 4$. Pro čísla z druhých řádků trojcyklů A a A' platí $(4k + 4 - 2i) + (4k + 4 - 2(k + 2 - i)) = 6k + 4$. Pokud je počet sloupců v levé části matice lichý, bude zde trojcyklus P , který neuvažujeme. Tím pádem věta 2 platí pro levou část matice.

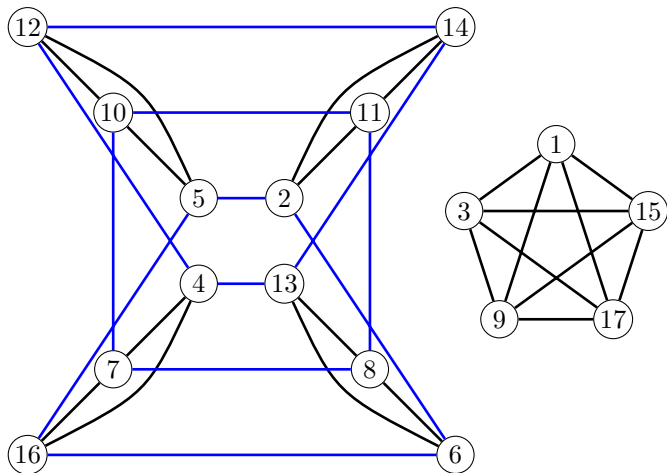
Zaměříme se na pravou část Trojcyklové matice, tedy $i \geq k + 2$. Označme B i -tý sloupec a B' $(3k + 3 - i)$ -tý sloupec matice. Poté pro součet čísel z prvního a třetího řádku v trojcyklech B a B' platí $i + (3k + 1 + (3k + 3 - i)) = 6k + 4$. Pro čísla z druhých řádků trojcyklů B a B' platí $(6k + 5 - 2i) + (6k + 5 - 2(3k + 3 - i)) = 6k + 4$. Pokud je počet sloupců v pravé části matice lichý, bude zde trojcyklus P , který neuvažujeme. Tím pádem věta 2 platí i pro pravou část matice. □

Komponenta $H_4(A, A', B, B')$



$H_4(A, A', B, B')$ — 4-pravidelná striktně antimagická komponenta na 12 vrcholech

Ukázka konstrukce



4-pravidelný striktně antimagický graf na 17 vrcholech

Nejmenší možné grafy z $(n - 5)$ -pravidelných

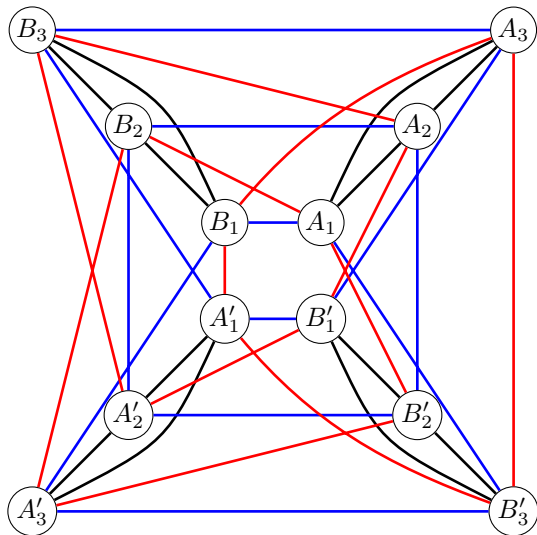
Třída	Nejmenší graf	Struktura
$12k+1$	20-pravidelný na 25 vrcholech	$5 K_5$
$12k+3$	10-pravidelný na 15 vrcholech	$3 K_5$
$12k+5$	12-pravidelný na 17 vrcholech	$H_4 + K_5$
$12k+7$	50-pravidelný na 55 vrcholech	$11 K_5$
$12k+9$	40-pravidelný na 45 vrcholech	$9 K_5$
$12k+11$	30-pravidelný na 35 vrcholech	$7 K_5$

Nejmenší možné grafy z $(n - 5)$ -pravidelných

Třída	Nejmenší graf	Struktura
12k+1	20-pravidelný na 25 vrcholech	5 K_5
12k+3	10-pravidelný na 15 vrcholech	3 K_5
12k+5	12-pravidelný na 17 vrcholech	$H_4 + K_5$
12k+7	50-pravidelný na 55 vrcholech	11 K_5
12k+9	40-pravidelný na 45 vrcholech	9 K_5
12k+11	30-pravidelný na 35 vrcholech	7 K_5

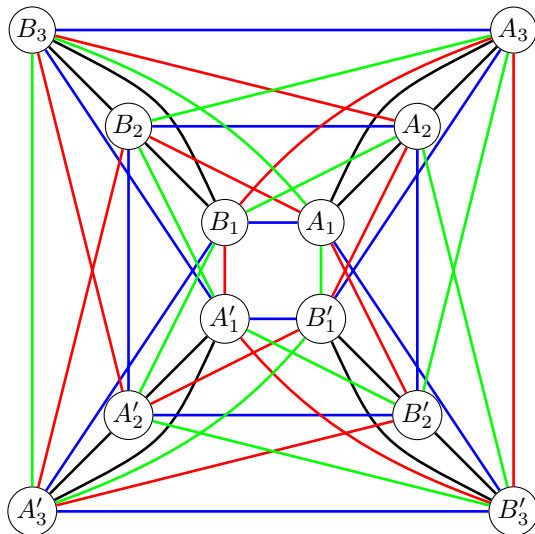
- ▶ Zbývající grafy nalezeny buď počítačem, nebo jinou konstrukcí

$(n - 7)$ -pravidelné grafy



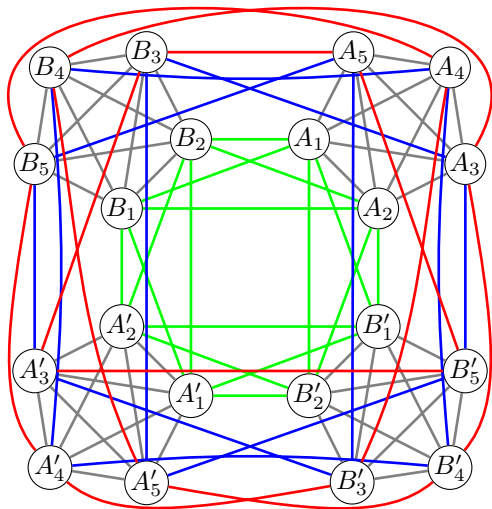
$H_6(A, A', B, B')$ — 6-pravidelná striktně antimagická komponenta na 12 vrcholech

$(n - 9)$ -pravidelné grafy



$H_8(A, A', B, B')$ — 8-pravidelná striktně antimagická komponenta na 12 vrcholech

$(n - 9)$ -pravidelné grafy



$H_8(A, A', B, B')$ – 8-pravidelná striktně antimagická komponenta na 20 vrcholech

Zbývalo (nedávno) vyřešit

Třída	Pravidelnost	Vrcholy	Nalezeno?
$12k + 7$	14	19	Počítačem
	26	31	Počítačem, $K_5 + G_{16}(3 - 11, 13 - 19)$
	38	43	Konstrukcí A
$12k + 9$	16	21	Počítačem, $3K_5 + 7 - 11, 13 - 15, 17 - 19, 21 - 25$
	28	33	Konstrukcí A
$12k + 11$	18	23	Počítačem, Konstrukcí A
$12k + 1$	6	13	Počítačem
	18	25	Počítačem
	30	37	Konstrukcí A
$12k + 3$	8	15	Počítačem
	20	27	Konstrukcí A
	32	39	$3K_7 + G_{18}(11 - 19, 21 - 29)$
	44	51	Konstrukcí A
$12k + 5$	10	17	Počítačem
	22	29	Počítačem
	34	41	Konstrukcí A
	46	53	$5K_7 + G_{18}(18 - 26, 28 - 36)$
$12k + 11$	58	65	$7K_7 + G_{16}(25 - 32, 34 - 41)$
	16	23	Počítačem
$20k + 3$	14	23	Počítačem
	34	43	Úpravou obecné konstrukce
$20k + 5$	16	25	Počítačem
$20k + 11$	2	11	Počítačem
	22	31	Počítačem
$20k + 13$	4	13	Počítačem
$20k + 15$	6	15	Počítačem
	26	35	Úpravou obecné konstrukce
$20k + 17$	8	17	Počítačem
$20k + 19$	10	19	Počítačem

Zbývá vyřešit (odměna a sláva čeká...)

Jedná se o $(n - 11)$ -pravidelné grafy

Třída	Pravidelnost	Vrcholy	Nalezeno?
$20k + 1$	10	21	Počítačem
	30	41	Ne
$20k + 3$	12	23	Počítačem
	32	43	Ne
$20k + 5$	14	25	Počítačem
	34	45	Ne
	54	65	Ne
$20k + 7$	16	27	Ne
$20k + 9$	18	29	Ne
	38	49	Ne
$20k + 17$	26	37	Ne

MagicGrapher

The screenshot shows the MagicGrapher application window. On the left, there are input fields for 'Nodes' (13) and 'Edges' (6), a 'Generate!' button, and a 'Terminate' button. Below these are several checkboxes: 'Use antimagic' (unchecked), 'Symmetric graphs only' (unchecked), 'Show all solutions' (checked), 'Exit on first solution' (unchecked), 'Convert to LaTeX' (unchecked), and 'Use multithread' (checked). A section titled 'Instructions:' contains text about node/edge counts, LaTeX conversion, and multithreading. At the bottom left, it says 'Augustin Židek, 2012'. On the right, there are fields for 'Solutions:' (36) and 'k:' (42.0), and a status bar that says 'Done! Took 666 ms.'. A large text area labeled 'Textual form:' displays a list of solutions, each a set of 13 numbers.

Nodes: Edges:

Use antimagic
 Symmetric graphs only
 Show all solutions
 Exit on first solution
 Convert to LaTeX
 Use multithread

Instructions:
Amount of nodes must be greater than amount of edges.

When converting to LaTeX, LaTeX installation must be present on the system. The application will create file called "nodes_edges.tex" in your home folder and LaTeX will process it.

The application will use as many threads as many processors available.

Augustin Židek, 2012

Solutions: k: Done! Took 666 ms.

Textual form:

```
2: 3, 4, 6, 7, 10, 12,
3: 2, 5, 7, 8, 9, 11,
4: 1, 2, 5, 9, 12, 13,
5: 1, 3, 4, 10, 11, 13,
6: 1, 2, 7, 8, 11, 13,
7: 2, 3, 6, 8, 11, 12,
8: 1, 3, 6, 7, 12, 13,
9: 1, 3, 4, 10, 11, 13,
10: 1, 2, 5, 9, 12, 13,
11: 3, 5, 6, 7, 9, 12,
12: 2, 4, 7, 8, 10, 11,
13: 4, 5, 6, 8, 9, 10,

1: 4, 5, 6, 8, 9, 10,
2: 3, 5, 6, 7, 9, 12,
3: 2, 4, 7, 8, 10, 11,
4: 1, 3, 5, 9, 11, 13,
5: 1, 2, 4, 10, 12, 13,
6: 1, 2, 7, 8, 11, 13,
7: 2, 3, 6, 8, 11, 12,
8: 1, 3, 6, 7, 12, 13,
9: 1, 2, 4, 10, 12, 13,
10: 1, 3, 5, 9, 11, 13,
11: 3, 4, 6, 7, 10, 12,
12: 2, 5, 7, 8, 9, 11,
13: 4, 5, 6, 8, 9, 10,
```

Výsledky

- ▶ Pro $(n - 5, 7, 9)$ -pravidelné grafy vyřešeno pro **všechny** případy

Výsledky

- ▶ Pro $(n - 5, 7, 9)$ -pravidelné grafy vyřešeno pro **všechny** případy
- ▶ Pro $(n - 11)$ -pravidelné grafy vyřešeno až na 10 případů

Výsledky

- ▶ Pro $(n - 5, 7, 9)$ -pravidelné grafy vyřešeno pro **všechny** případy
- ▶ Pro $(n - 11)$ -pravidelné grafy vyřešeno až na 10 případů
- ▶ Článek do odborného matematického časopisu

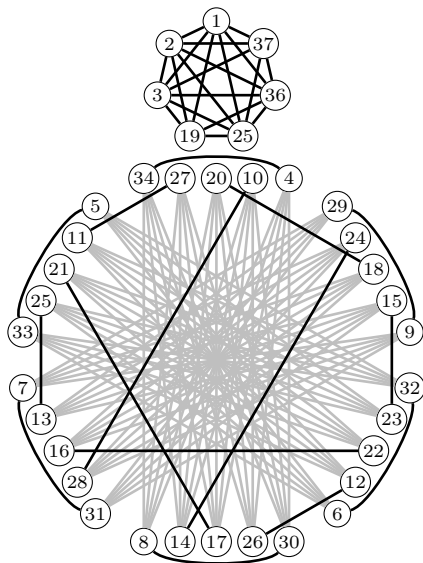
Výsledky

- ▶ Pro $(n - 5, 7, 9)$ -pravidelné grafy vyřešeno pro **všechny** případy
- ▶ Pro $(n - 11)$ -pravidelné grafy vyřešeno až na 10 případů
- ▶ Článek do odborného matematického časopisu
- ▶ Zobecnění konstrukce na $(n - (2k + 1))$ -pravidelné grafy?

Výsledky

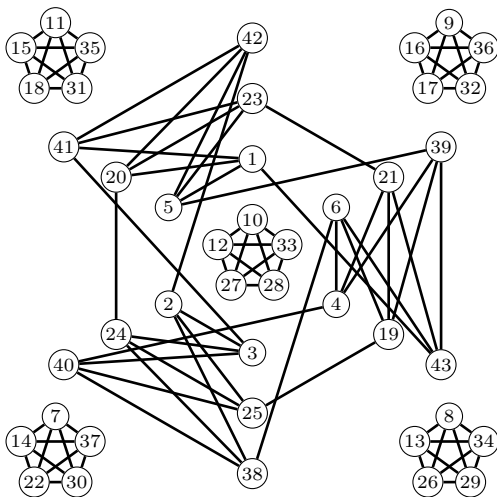
- ▶ Pro $(n - 5, 7, 9)$ -pravidelné grafy vyřešeno pro **všechny** případy
- ▶ Pro $(n - 11)$ -pravidelné grafy vyřešeno až na 10 případů
- ▶ Článek do odborného matematického časopisu
- ▶ Zobecnění konstrukce na $(n - (2k + 1))$ -pravidelné grafy?
- ▶ Použití při LOH 2016?

Ukázka speciálního případu



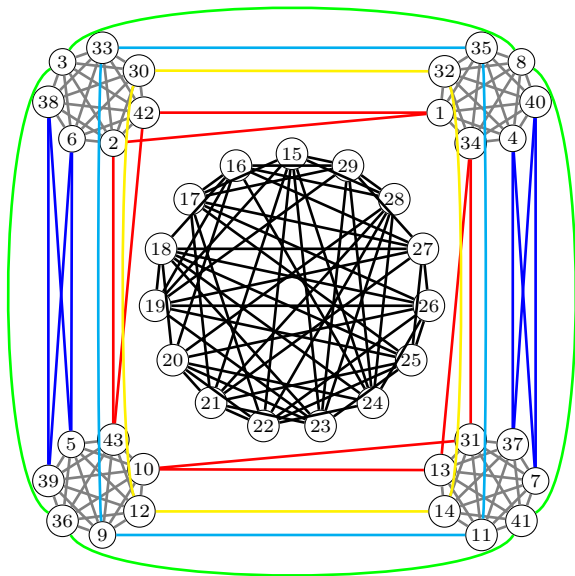
6-pravidelný striktně antimagický graf na 37 vrcholech

2. Ukázka speciálního případu



4-pravidelný striktně antimagický graf na 43 vrcholech

3. Ukázka speciálního případu



8-pravidelný striktně antimagický graf na 43 vrcholech

Diskuse, otázky, řešení?

augustin@zidek.eu

Děkuji za pozornost