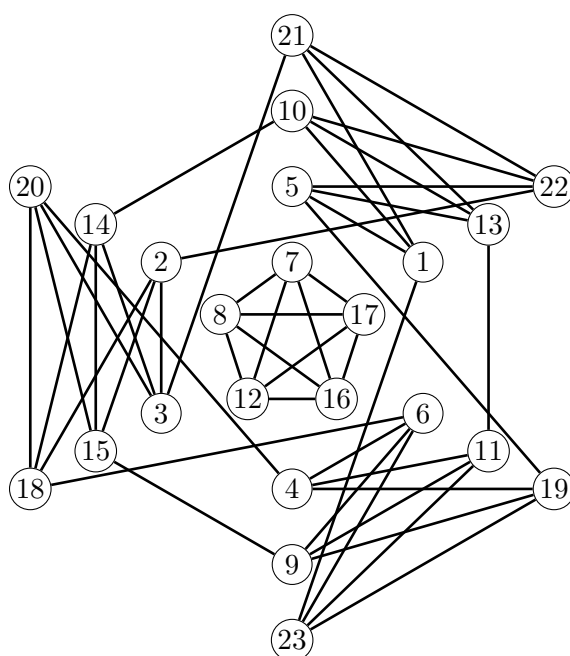


STŘEDOŠKOLSKÁ ODBORNÁ ČINNOST



Neúplné sportovní turnaje

Augustin Židek

Malenovice 2012

STŘEDOŠKOLSKÁ ODBORNÁ ČINNOST
Obor SOČ: 01. Matematika a statistika

Neúplné sportovní turnaje

Incomplete sport tournaments

2. opravená verze

Autor: Augustin Žídek
Škola: Gymnázium, Frýdlant nad Ostravicí
nám. T. G. Masaryka 1260, příspěvková organizace
739 11 Frýdlant nad Ostravicí
Konzultant: Mgr. Petr Kovář, Ph.D.
VŠB - Technická univerzita Ostrava

Malenovice 2012

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou práci vypracoval samostatně pod vedením Mgr. Petra Kováře, Ph.D. Použil jsem pouze podklady (literaturu, SW atd.) uvedené v příloženém seznamu a postup při zpracování a dalším nakládání s prací je v souladu se zákonem č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) v platném znění.

V Malenovicích dne 18. května 2012

Poděkování

Děkuji panu Mgr. Petru Kovářovi, Ph.D. za čaj, obětavou pomoc a cenné připomínky, které mi poskytoval. Dále děkuji Petře za její nadšení pro každé nalezené ohodnocení. A děkuji svým rodičům za trpělivost, když jsem bděl v noci nad grafy místo spaní.

ANOTACE

Práce se zabývá hledáním magického ohodnocení velmi hustých grafů, tedy $(n - 5)$, $(n - 7)$ a $(n - 9)$ -pravidelných grafů. Vzhledem k jejich vysoké hustotě je výhodnější hledat striktně antimagické ohodnocení jejich doplňků. Tato práce popisuje metodu, která pro $(n - 5)$ a $(n - 7)$ -pravidelné vyřeší všechny případy pro liché n až na malý počet speciálních případů. Tyto speciální případy jsou však nalezeny buď jinou konstrukcí nebo počítačem a jsou zahrnuty v práci. Díky práci lze nalézt ohodnocení libovolného $(n - 5)$ -pravidelného grafu pro liché $n > 13$, libovolného $(n - 7)$ -pravidelného grafu pro liché $n > 11$ a libovolného $(n - 9)$ -pravidelného grafu pro liché $n > 13$.

Klíčová slova: magické ohodnocování grafů; neúplné turnaje; teorie grafů; diskrétní matematika; Kotzigova matice

ANNOTATION

The work focuses on finding distance-magic labeling for very dense graphs – $(n - 5)$, $(n - 7)$ and $(n - 9)$ -regular graphs. Because of the big density of the given graphs it is more effective to search for strict distance-antimagic labeling of their complementary graphs. This work describes a method that solves all cases for $(n - 5)$ and $(n - 7)$ -regular graphs except for small amount of special cases. These special cases have been solved, however, using different construction or by a computer and they are included in the work. With the construction it is possible to find distance-magic labeling for any $(n - 5)$ -regular graph for any odd $n > 13$, for any $(n - 7)$ -regular graph for any odd $n > 11$ and for any $(n - 9)$ -regular graph for any odd $n > 13$.

Key words: distance-magic graph labeling; incomplete sport tournaments; theory of graphs; discrete mathematics; Kotzig's matrix

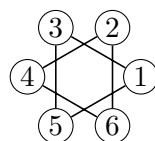
Obsah

Úvod	vii
Přehled použitých pojmů	viii
1 Nástroje pro hledání striktně antimagického ohodnocení	1
1.1 Váha vrcholu v antimagickém ohodnocení	1
1.2 Kotzigova matice	1
1.3 Věty o vztazích v Kotzigově matici	2
2 Konstrukce ohodnocení na $(n - 5)$-pravidelných grafech	3
2.1 Konstrukce ohodnocení na $12k + 5$ vrcholech	3
2.2 Konstrukce ohodnocení na $12k + 1$ vrcholech	5
2.3 Konstrukce ohodnocení na $12k + 3$ vrcholech	5
2.4 Konstrukce ohodnocení na $12k + 7$ vrcholech	5
2.5 Konstrukce ohodnocení na $12k + 9$ vrcholech	6
2.6 Konstrukce ohodnocení na $12k + 11$ vrcholech	6
3 Konstrukce ohodnocení na $(n - 7)$-pravidelných grafech	7
3.1 Konstrukce přidáváním komponenty H_6A, A', B, B' na 12 vrcholech	7
3.2 Konstrukce přidáváním komponenty H_6A, A', B, B' na 20 vrcholech	8
4 Konstrukce ohodnocení na $(n - 9)$-pravidelných grafech	10
5 Obecné shrnutí konstrukce	12
5.1 $(n - 5)$ -pravidelné	12
5.2 $(n - 7)$ -pravidelné	12
5.3 $(n - 9)$ -pravidelné	13
6 Speciální případy	14
6.1 Konstrukce A	14
6.2 Konstrukce B	14
Závěr	16
Příloha – Grafy speciálních případů	17

Úvod

Představme si sportovní turnaj. V mnoha turnajích, na které jsme zvyklí, je běžné, že hraje zápas každý s každým. Může však nastat situace, kdy není možné, aby se odehrály všechny tyto zápasy. Proto je nutné počet zápasů každého týmu zmenšit o stejný počet.

Jak však zajistit spravedlnost, když týmy jsou různě silné (což víme například na základě výsledků z minulého roku)? Hodnota vrcholu je pořadí týmu v minuloročním turnaji, tedy jeho síla. Tím pádem je vrchol s hodnotou 1 nejsilnější, vrchol s největší hodnotou nejslabší. Podívejme se na obrázek, který reprezentuje neúplný sportovní turnaj. Toto je příklad nespravedlivého neúplného turnaje, protože například tým 2 má mnohem slabší soupeře než tým 5.



Obrázek 1: Nespravedlivý neúplný turnaj

V této práci se budeme zabývat velmi hustými grafy, konkrétně $(n - 5)$, $(n - 7)$ a $(n - 9)$ -pravidelnými, což jsou takové grafy, že jim do kompletního grafu chybí 5, resp. 7, resp. 9 hran. Vzhledem k tomu, že v těchto grafech je počet hran velmi velký bude pro nás výhodnější hledat jejich doplňkové grafy, které splňují tu vlastnost, že jsou tzv. striktně antimagické. Platí, že máme-li striktně antimagický ohodnocený graf, je jeho doplňkem magický ohodnocený graf.

Pro sudá n nemůže existovat magické ohodnocení grafu. To proto, že pro sudá n by magická konstanta nebyla celé číslo.

Přehled použitých pojmů

- **Neúplný (sportovní) turnaj:** Sportovní turnaj, v němž každý z n týmů odehrál stejný počet zápasů, který je však menší než $n - 1$, a každé dva týmy spolu hrály maximálně jeden zápas. V této práci je modelován neúplným grafem, kde jednotlivé vrcholy reprezentují týmy a hrany mezi nimi reprezentují odehraný zápas.
- **Pravidelný graf:** Graf, ve kterém jsou všechny vrcholy stejného stupně.
- **Label vrcholu:** Číslo přiřazené každému vrcholu v grafu, reprezentuje jakousi sílu týmu. V této práci má každý vrchol různý label (každý label je v daném grafu použit maximálně jednou).
- **Váha vrcholu:** Součet labelů vrcholů, které jsou s daným vrcholem spojeny hranou.
- **Magické ohodnocení pravidelného grafu G o n vrcholech:** Přiřazení labelů z množiny přirozených čísel 1 až n vrcholům grafu G tak, aby váha každého vrcholu byla stejná.
- **Kotzigova matice:** Matice přirozených po sobě jdoucích čísel 1 až n , ve které platí, že součet čísel je stejný v každém sloupci.

Kapitola 1

Nástroje pro hledání striktně antimagického ohodnocení

1.1 Váha vrcholu v antimagickém ohodnocení

Vzhledem k vysokému stupni každého vrcholu konstruovaných grafů bude výhodnější konstruovat tzv. *striktně antimagické* ohodnocení grafu. Striktně antimagicky ohodnocený graf je takový graf, který je doplňkem magicky ohodnoceného grafu. Pro váhu vrcholu s hodnotou i v striktně antimagickém ohodnocení platí:

$$w(i) = \frac{m(m+1)}{2} - m_k - i \quad (1.1)$$

kde m_k je magická konstanta pro daný graf na m vrcholech. Magickou konstantu pro daný graf na m s pravidelností p vrcholech můžeme vypočítat jako:

$$m_k = \frac{(m+1)p}{2} \quad (1.2)$$

.

Z čehož vyplývá, že původní vztah pro váhu vrcholu můžeme přepsat do tvaru:

$$w(i) = \frac{(m+1)(m-p)}{2} - i \quad (1.3)$$

1.2 Kotzigova matice

Definice: Kotzigova matice je matice se třemi řádky a n sloupci s čísly 1 až $3n$, kde platí, že součet všech tří čísel v každém sloupci je stejný.

Konstrukce: Kotzigovu matici můžeme vytvořit pro čísla 1 až $3n = 6k + 3$, kde n je liché, například následujícím způsobem. Číslo i označuje číslo sloupce a platí $i = 1, 2, \dots, 2k + 1$:

Řádek	Hodnota	
1. řádek	i	pro všechny sloupce
2. řádek	$4k + 4 - 2i$	pro sloupce 1 až $k + 1$
	$6k + 5 - 2i$	pro sloupce $k + 2$ až $2k + 1$
3. řádek	$5k + 2 + i$	pro sloupce 1 až $k + 1$
	$3k + 1 + i$	pro sloupce $k + 2$ až $2k + 1$

Snadno ověříme, že součet čísel v každém sloupci je $9k + 6$. V $(k + 2)$. sloupci dojde ve druhém i třetím řádku ke *zlomu*, tedy aritmetické posloupnosti mezi sousedními políčky na řádku, které platily doposud, se změní. Nazvěme všechny sloupce vlevo od zlomu (tedy $i \leq k + 1$) levou částí Kotzigovy matice a zbylé sloupce (tedy $i \geq k + 2$) pravou částí Kotzigovy matice. Levá část matice má $k + 1$ sloupců, pravá část má pouze k sloupců.

V Kotzigově matici se určitě bude nacházet takový sloupec, který bude v prostředním řádku obsahovat číslo $3k + 2$. Tento sloupec nechť je sloupcem P .

1.3 Věty o vztazích v Kotzigově matici

Věta 1 (Pomocná): V žádném sloupci kromě P nebudou dva vrcholy se součtem $6k + 4$.

Důkaz. Mají-li dva vrcholy součet $6k + 4$, musí mít zbývající vrchol hodnotu $3k + 2$. Vzhledem k tomu, že v Kotzigově matici je každé číslo 1 až $6k + 3$ použito právě jednou, bude se tento součet vyskytovat jen v jednom sloupci, konkrétně v sloupci P . \square

Věta 2 (Mocná): Dávají-li dvě čísla, jedno ze sloupce A a druhé ze sloupce A' součet $6k + 4$, potom dávají stejný součet i dvě zbývající dvojice čísel z těchto sloupců.

Důkaz. Zaměříme se na levou část Kotzigovy matice, tedy $i \leq k + 1$. Označme A i -tý sloupec a A' $(k + 2 - i)$ -tý sloupec matice. Poté pro součet čísel z prvního a třetího řádku v sloupcích A a A' platí $i + ((5k + 2) + (k + 2 - i)) = 6k + 4$. Pro čísla z druhých řádků sloupců A a A' platí $(4k + 4 - 2i) + (4k + 4 - 2(k + 2 - i)) = 6k + 4$. Pokud je počet sloupců v levé části matice lichý, bude zde sloupec P , který neuvažujeme. Tím pádem věta 2 platí pro levou část matice.

Zaměříme se na pravou část Kotzigovy matice, tedy $i \geq k + 2$. Označme B i -tý sloupec a B' $(3k + 3 - i)$ -tý sloupec matice. Poté pro součet čísel z prvního a třetího řádku v sloupcích B a B' platí $i + (3k + 1 + (3k + 3 - i)) = 6k + 4$. Pro čísla z druhých řádků sloupců B a B' platí $(6k + 5 - 2i) + (6k + 5 - 2(3k + 3 - i)) = 6k + 4$. Pokud je počet sloupců v pravé části matice lichý, bude zde sloupec P , který neuvažujeme. Tím pádem věta 2 platí i pro pravou část matice. \square

Kapitola 2

Konstrukce ohodnocení na $(n - 5)$ -pravidelných grafech

2.1 Konstrukce ohodnocení na $12k + 5$ vrcholech

Budeme konstruovat antimagické grafy na $12k + 5$ vrcholech, přičemž stupeň každého bude čtyři. Konstrukce bude vypadat například takto:

1. Zkonstruujeme Kotzigovu matici se třemi řádky pro čísla 2 až $12k + 4$, přičemž v jednotlivých řádcích budou čísla 2 až $4k + 2$, resp. $4k + 3$ až $8k + 3$, resp. $8k + 4$ až $12k + 4$. Jednotlivé sloupce budou reprezentovat trojcykly (tedy vrcholy vzájemně spojené). Tato matice bude pro nejmenší možný graf, tedy 12-pravidelný na 17 vrcholech vypadat takto:

A	P	A'	B	B'
2	3	4	5	6
11	9	7	10	8
14	15	16	12	13

2. Nepoužitá čísla 1 a $12k + 5$ nebudou v žádném ze sloupců. Tím pádem každému z vrcholů v sloupcích chybí do jeho správné váhy $w(i)$ ještě

$$\Delta w(i) = \frac{(12k + 5)(12k + 6)}{2} - m_k - i - (L - i) \quad (2.1)$$

kde L je součet jednoho sloupce v Kotzigově matici, tedy součet jednoho sloupce je po úpravách

$$L = 18k + 9. \quad (2.2)$$

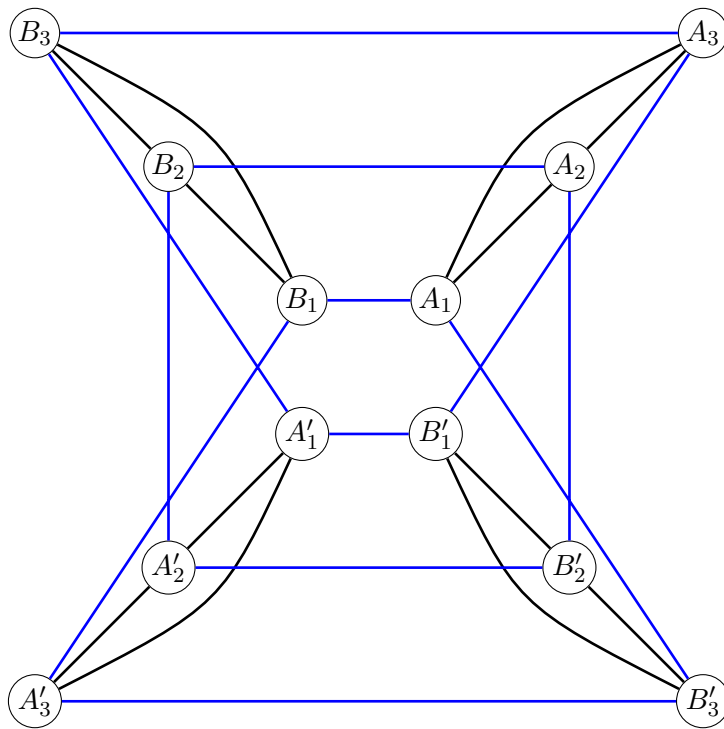
Po upravení (2) dostáváme vztah

$$\Delta w(i) = 12k + 6 = \text{Nejmenší} + \text{největší vrchol} \quad (2.3)$$

3. Vezměme sloupec P a sestrojme hrany mezi každým z vrcholů z P a vrcholy 1 a $12k + 5$. Dále sestrojme hranu mezi vrcholem 1 a $12k + 5$.

Získáváme komponentu K_5 , kde má každý vrchol požadovanou váhu. To proto, že vrcholům p chyběla váha $12k + 6$, kterou získaly spojením s vrcholy 1 a $12 + 5k$. Vrcholu 1 chybělo $30k + 15$, tedy spojením s $12k + 6$ a $18k + 9$ je jeho váha správná. Analogicky pro vrchol $12k + 5$.

4. Zbývá $4k$ trojcyklů, kde je nutné každý vrchol spojit hranami se dvěma vrcholy tak, aby jejich součet byl $12k + 6$. Potřebujeme tedy ukázat, že vždy existují takové čtyřcykly, kde každý jejich vrchol leží v jiném trojcyklu, a že je možné všechny vrcholy přiřadit do těchto čtyřcyklů.



Obrázek 2.1: $H_4(A, A', B, B')$ — 4-pravidelná striktně antimagická komponenta na 12 vrcholech

Díky větám 1 a 2 je toto možné. Ve čtveřici trojcyklů jsme schopni vytvořit tři čtyřcykly tak, že mají každý ze svých vrcholů v jiném trojcyklu, viz obrázek 2.1. Tato komponenta nechť se jmenuje $H_4(A, A', B, B')$. Protože celkový počet vrcholů, kterým takto ještě chyběly dvě hrany, byl ve tvaru $12k$, tedy dělitelný čtyřmi, lze použít a ohodnotit všechny vrcholy. Tímto jsme zkonstruovali 4-pravidelný striktně antimagický graf.

Charakteristika grafu: Grafy zkonstruované touto konstrukcí se vždy budou skládat minimálně ze dvou komponent, konkrétně z $k+1$ komponent. Tím pádem bude doplňkový magický graf vždy souvislý (což je pro sportovní turnaje vhodné).

2.2 Konstrukce ohodnocení na $12k + 1$ vrcholech

Víme, že 8-pravidelný graf na 13 vrcholech nelze zkonstruovat, každopádně nikoliv pomocí důkazu, ale prozkoumání všech možností hrubou silou.

Toto ohodnocení se bude lišit od $12k + 5$ pravidelných tím, že bude obsahovat pět komponent o pěti vrcholech ($12k + 5$ obsahovalo jen jednu). Konstrukce bude vypadat například takto:

1. Zkonstruujeme Trojcyklovou matici pro čísla 6 až $12k - 5$. Ze zbylých čísel 1 až 5 a $12k - 4$ až $12k + 1$ sestavíme takové dvojice, aby byl jejich součet byl $12k + 2$. Podle (1) a (2) chybí každému z těchto vrcholů do správného ohodnocení:

$$\Delta w(i) = \frac{(12k + 1)(12k + 2)}{2} - \frac{(12k + 2)(12k - 4)}{2} - (12k + 2 - i) - i = 18k + 3 \quad (2.4)$$

Kotzigova matice pro nejmenší možný graf, tedy 20-pravidelný graf na 25 vrcholech bude vypadat takto:

6	7	8	9	10
15	13	11	14	12
18	19	20	16	17
1	2	3	4	5
25	24	23	22	21

2. Kotzigova matice z prvního kroku bude ve sloupcích rovněž poskytovat součet $18k + 3$, tedy jsme schopni každý sloupec přiřadit právě jedné dvojici čísel se součtem $6k + 4$ a vytvořit komponentu o pěti vrcholech, každou se stupněm čtyři. Tyto komponenty budou již správně (antimagicky) ohodnoceny.
3. Tímto jsme ohodnotili pouze 20-pravidelný graf na 25 vrcholech. Tato konstrukce však lze zobecnit na celou třídu. V případě, že bychom přidali $12m$ vrcholů, krok číslo jedna by zůstal stejný. Každopádně Kotzigova matice, která by vznikla by byla o $4m$ sloupců větší. Těchto $4m$ sloupců však lze uspořádat do struktury popsané v 4. bodu konstrukce na $12k + 5$ vrcholech. Tím jsme ukázali, že i tato třída lze pro $k > 1$ vždy ohodnotit.

2.3 Konstrukce ohodnocení na $12k + 3$ vrcholech

Postup bude v tomto případě analogický s 2.2, akorát nebudeme konstruovat pět komponent o pěti vrcholech, ale pouze tři. Zbylých vrcholů v trojcyklech bude $4m$, tedy podle Věty 2 je bude možné správně ohodnotit.

2.4 Konstrukce ohodnocení na $12k + 7$ vrcholech

První graf, který zde dovedeme ohodnotit je 50-pravidelný graf na 55 vrcholech. Ten zkonstruujeme analogicky jako u předešlých, tedy použijeme 11 komponent K_5 . Všechna další ohodnocení z této třídy získáme přidáváním $12k$ vrcholů. První graf bude vypadat takto (jednotlivé sloupce reprezentují jednotlivé komponenty K_5):

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
55	54	53	52	51	50	49	48	47	46	45
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
33	31	29	27	25	23	32	30	28	26	24
38	39	40	41	42	43	33	34	35	36	37

2.5 Konstrukce ohodnocení na $12k + 9$ vrcholech

Analogicky jako v 2.4, počáteční graf bude 40pravidelný na 45 vrcholech, který bude vypadat takto (jednotlivé sloupce reprezentují jednotlivé komponenty K_5):

1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	44	43	42	41	40	39	38	37
10	11	12	13	14	15	16	17	18
27	25	23	21	19	26	24	22	20
32	33	34	35	36	28	29	30	31

2.6 Konstrukce ohodnocení na $12k + 11$ vrcholech

Analogicky jako v 2.4, počáteční graf bude 30pravidelný na 35 vrcholech, který bude vypadat takto (jednotlivé sloupce reprezentují jednotlivé komponenty K_5):

1	2	3	4	5	6	7
35	34	33	32	31	30	29
8	9	10	11	12	13	14
21	19	17	15	20	18	16
25	26	27	28	22	23	24

Kapitola 3

Konstrukce ohodnocení na $(n - 7)$ -pravidelných grafech

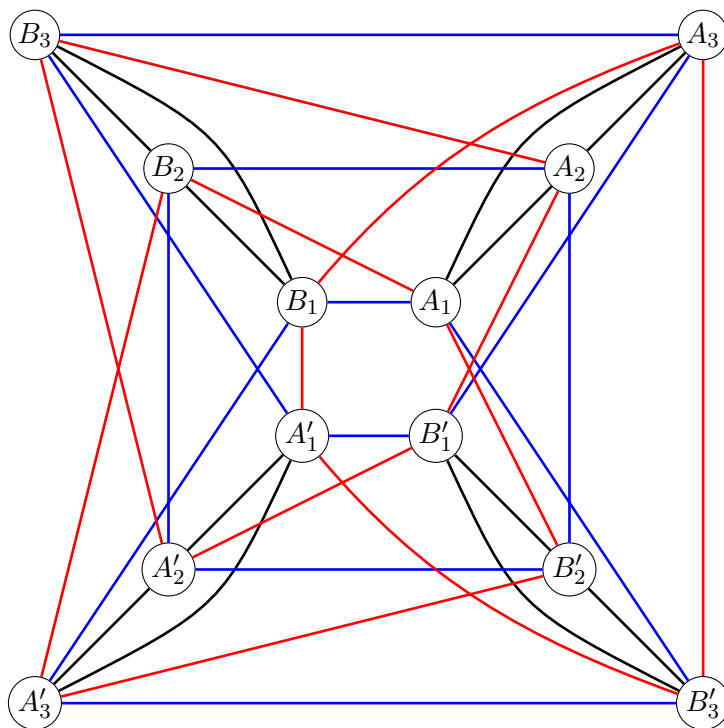
3.1 Konstrukce přidáváním komponenty H_6A, A', B, B' na 12 vrcholech

Při konstrukci $(n - 7)$ -pravidelných grafů budeme postupovat analogicky jako u $(n - 5)$ -pravidelných, tedy:

1. Pro každou třídu $12k + p$, kde $p \in \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ zkonstruujeme *počáteční graf*. Počáteční graf je složen pouze z komponent K_7 (s výjimkou třídy $12k + 7$), které jsou správně antimagicky ohodnoceny. Na tyto komponenty použijeme vždy dvě nejmenší možná čísla, dvě největší možná čísla a tři čísla z jednoho sloupce Trojcyklové matice. Tedy zkonstruujeme vlastně magický obdélník se sedmi řádky.
2. Pro jednotlivé třídy $12k + p$ budou mít počáteční grafy tyto parametry:

Třída	Pravidelnost	Počet vrcholů	Poznámka
$12k + 1$	42	49	7 komponent K_7
$12k + 3$	56	63	9 komponent K_7
$12k + 5$	70	77	11 komponent K_7
$12k + 7$	12	19	Komponenta K_7 a $H_6(A, A', B, B')$
$12k + 9$	14	21	3 komponenty K_7
$12k + 11$	28	35	5 komponent K_7

3. K těmto grafům umíme přidat libovolný počet 6-pravidelných komponent na 12 vrcholech tak, že graf zůstane správně ohodnocen. To proto, při zvýšení počtu vrcholů o 12 přibudou v Trojcyklové matici čtyři sloupce, které si vezmeme na sestavení komponenty $H_6(A, A', B, B')$. Tyto komponenty budou mít strukturu jako na obrázku 3.1, kde jednotlivé trojice A, A', B, B' jsou sloupce z Trojcyklové matice. Zároveň musí platit, že ani jedna z těchto trojic není trojcyklem P .



Obrázek 3.1: $H_6(A, A', B, B')$ — 6-pravidelná striktně antimagická komponenta na 12 vrcholech

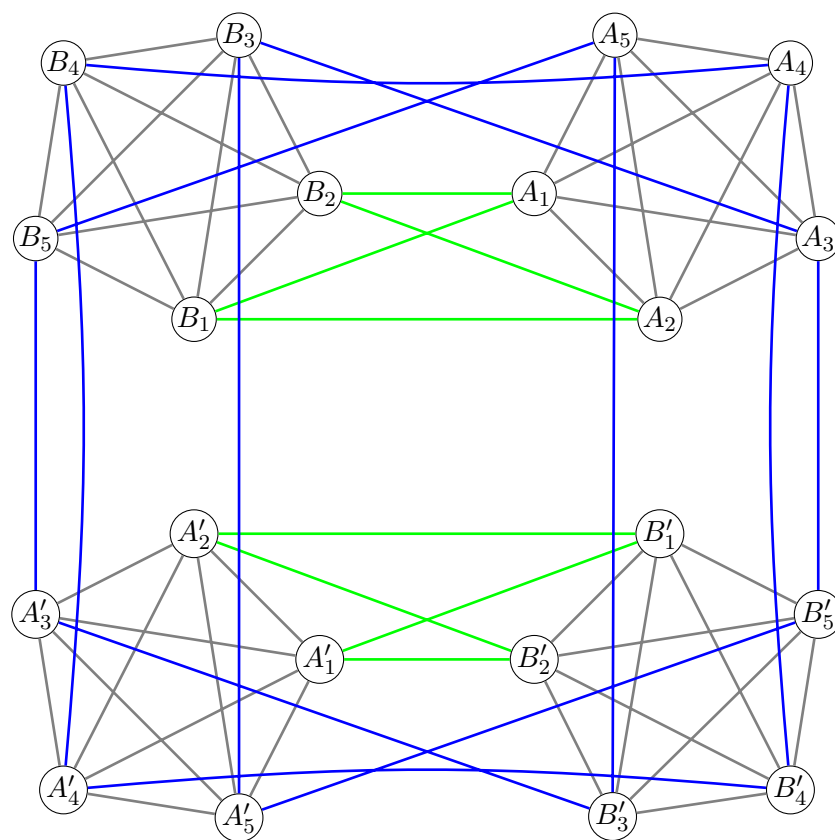
3.2 Konstrukce přidáváním komponenty H_6A, A', B, B' na 20 vrcholech

Metoda popsaná v předešlé sekci generuje velký počet speciálních případů, které je velice pracné dohledávat. Na jejich dohledávání se dá použít můj program, který je hledá hrubou silou, ale vzhledem k obrovskému počtu možností se jím dají nalézt jen grafy na max. 30 vrcholech.

Proto je velice výhodné analogicky jako jsme zkonstruovali komponentu H_6A, A', B, B' na 12 vrcholech zkonstruovat podobnou komponentu na 20 vrcholech. Tato komponenta se bude skládat z čtyřech K_5 , které zaručí správné antimagické ohodnocení vrcholům a dále z magických čtyřcyklů, viz obrázek.

Tato komponenta vznikla z Kotzigovy matice o pěti řádcích. První tři byly vytvořeny tak, jak je to popsáno v kapitole o Kotzigově matici, zbývající dva řádky byly vytvořeny vždy z dvojic čísel i a $n + 1 - i$, takže o nich víme, že dávají správný součet, který chybí každému vrcholu v K_5 .

Nyní jsme tedy schopni vytvářet grafy připomínající Mendělejevovu tabulku chemických prvků – uspořádáváme čísla 1 až n do struktury o třech, pěti, nebo sedmi řádcích. Jsme schopni sestavit libovolný $(n - 7)$ -pravidelný graf, jehož počet vrcholů lze zapsat ve tvaru $7k_1 + 12k_2 + 20k_3$, $k_i \in \mathbb{N}^0$.



Obrázek 3.2: $H_6(A, A', B, B')$ – 8-pravidelná striktně antimagická komponenta na 20 vrcholech

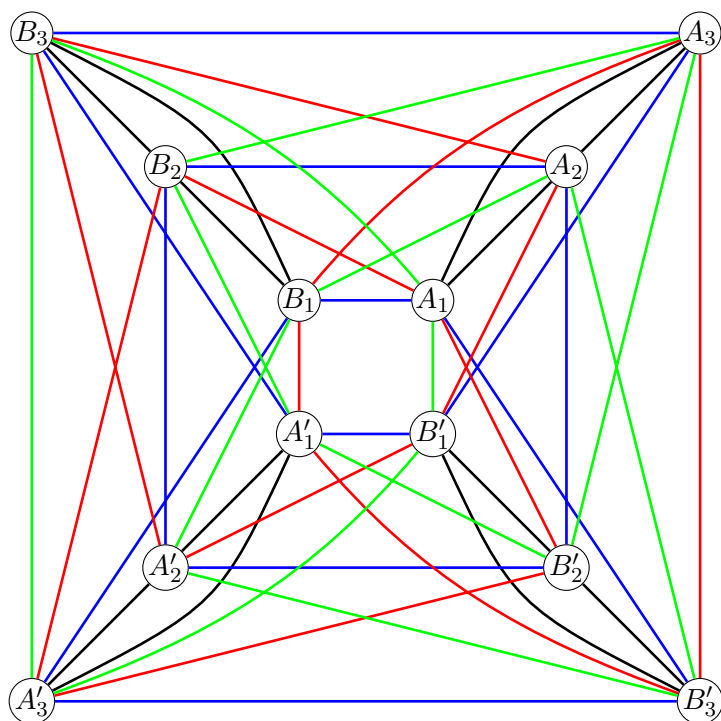
Kapitola 4

Konstrukce ohodnocení na $(n - 9)$ -pravidelných grafech

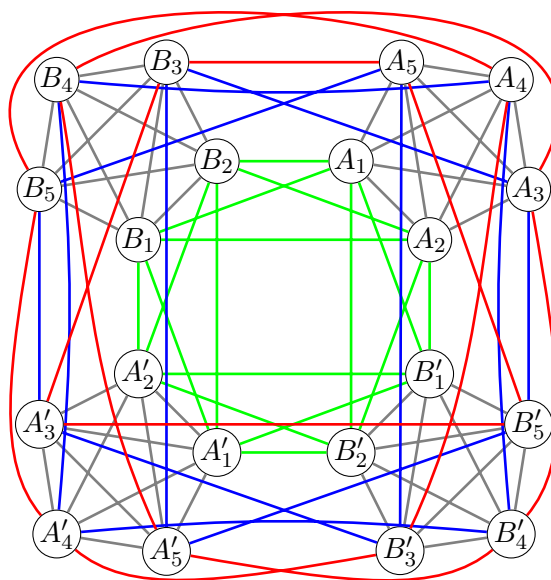
Zde ve většině případů nepůjde použít komponenta $H_8(A, A', B, B')$ na 12 vrcholech jako u $(n - 5)$ a $(n - 7)$ -pravidelných, protože bychom spolu s přidáváním K_9 uměli sestrojít jen grafy, jejichž počet vrcholů je dělitelný třemi. Stejně jako u $(n - 7)$ -pravidelných však umíme sestrojít $H_8(A, A', B, B')$ na 20 vrcholech a tím pádem spolu s $H_8(A, A', B, B')$ na 12 vrcholech umíme sestrojít téměř všechny grafy, až na konečný počet speciálních případů.

Pro tuto třídu také umíme sestrojít ještě analogickou komponentu $H_8(A, A', B, B')$ na 28 vrcholech – tedy $4K_7$, které jsou ještě pospojovány magickými čtyřcykly. Tím pádem umíme zkonstruovat libovolný $(n - 9)$ -pravidelný graf, jehož počet vrcholů lze zapsat ve tvaru $9k_1 + 12k_2 + 20k_3 + 28k_4$, $k_i \in \mathbb{N}^0$.

Komponenty $H_8(A, A', B, B')$ na 12 vrcholech a $H_8(A, A', B, B')$ na 20 vrcholech, které v tomto případě budeme přidávat jsou na obrázcích 4.1 a 4.2.



Obrázek 4.1: $H_8(A, A', B, B')$ — 8-pravidelná striktně antimagická komponenta na 12 vrcholech



Obrázek 4.2: $H_8(A, A', B, B')$ — 8-pravidelná striktně antimagická komponenta na 20 vrcholech

Kapitola 5

Obecné shrnutí konstrukce

5.1 $(n - 5)$ -pravidelné

Dostaneme parametry grafu G o t vrcholech, který máme zkonstruovat. V prvním kroku si musíme uvědomit strukturu grafu G , tedy zapsat počet vrcholů grafu t ve tvaru $5k_1 + 12k_2$, kde $k_i \in \mathbb{N}^0$. Pokud do tohoto tvaru rozložit nelze, potom se jedná o speciální případ, viz příloha. Pokud se však podařilo počet vrcholů tímto způsobem zapsat, je již jasná struktura grafu.

Poté sestrojíme Kotzigovu matici z čísel 1 (nevčetně) až $t - k_1$ (nevčetně). V sestrojené Kotzigově matici identifikujeme párové sloupce a sloupec P . Vytváříme K_5 : Ke sloupci P a k libovolným párovým sloupcům přidáme vždy dvojici čísel $t + 1$, které jsme nepoužili na konstrukce Kotzigovy matice.

Ze sloupců o pěti řádcích uděláme komponenty K_5 , ze zbývajících $4m$ sloupců zkonstruujeme m komponent $H_4(A, A', B, B')$ na 12 vrcholech.

5.2 $(n - 7)$ -pravidelné

Zde zapisujeme počet vrcholů t ve tvaru $7k_1 + 12k_2 + 20k_3$, kde $k_i \in \mathbb{N}^0$. Pokud t v tomto tvaru zapsal nelze, opět použijeme strukturu grafu z přílohy.

Konstruujeme Kotzigovu matici z čísel $2k_1 + 4k_3$ (nevčetně) až $t - (2k_1 + 4k_3)$ (nevčetně). Vytváříme K_7 : Ke sloupci P a k libovolným párovým sloupcům přidáme vždy dvě dvojice čísel $t + 1$, které jsme nepoužili na konstrukce Kotzigovy matice.

Z k_3 párů dvojic párů sloupců vytvoříme $H_6(A, A', B, B')$ na 20 vrcholech. To přidáním dvojice čísel se součtem $t + 1$, které jsme nepoužili v Kotzigově matici.

Ze zbývajících $4m$ sloupců zkonstruujeme m komponent $H_6(A, A', B, B')$ na 12 vrcholech.

5.3 $(n - 9)$ -pravidelné

Zde zapisujeme počet vrcholů t ve tvaru $9k_1 + 12k_2 + 20k_3 + 28k_4$, kde $k_i \in \mathbb{N}^0$. Pokud t v tomto tvaru zapsal nelze, opět použijeme strukturu grafu z přílohy.

Konstruujeme Kotzigovu matici z čísel $3k_1 + 4k_3 + 8k_4$ (nevčetně) až $t - (3k_1 + 4k_3 + 8k_4)$ (nevčetně). Vytváříme K_9 : Ke sloupci P a k libovolným párovým sloupcům přidáme vždy tři dvojice čísel $t + 1$, které jsme nepoužili na konstrukce Kotzigovy matice.

Z k_3 párů dvojic párů sloupců vytvoříme $H_8(A, A', B, B')$ na 20 vrcholech. To přidáním dvojice čísel se součtem $t + 1$, které jsme nepoužili v Kotzigově matici.

Z k_4 párů dvojic párů sloupců vytvoříme $H_8(A, A', B, B')$ na 28 vrcholech. To přidáním dvou dvojic čísel se součtem $t + 1$, které jsme nepoužili v Kotzigově matici.

Ze zbývajících $4m$ sloupců zkonstruujeme m komponent $H_8(A, A', B, B')$ na 12 vrcholech.

Kapitola 6

Speciální případy

Nalezená konstrukce vyžaduje pro každou třídu nejmenší graf, který lze zkonstruovat. Zbylé, vyšší již zkonstruovat jdou. Tímto ale vznikne konečný počet speciálních případů. Aby bylo pro všechny $(n - 5)$, $(n - 7)$, a $(n - 9)$ -pravidelné grafy nalezeno magické (resp. antimagické) ohodnocení, je nutné, aby byly zbylé speciální případy vyřešeny buď ručně (nalezením speciální konstrukce jim na míru) nebo počítačem.

Počítačem bylo ukázáno (dvěma nezávislými programy používajícími jiný algoritmus pro hledání magických ohodnocení), že pro $(n - 5)$ -pravidelné neexistuje ohodnocení pro $n < 15$, pro $(n - 7)$ -pravidelné pro $n < 13$ a pro $(n - 9)$ -pravidelné pro $n < 15$. Tyto případy tedy neuvádím v tabulce speciálních případů.

Vzhledem k vysoké časové náročnosti hledání ohodnocení hrubou silou (byť je můj algoritmus velice optimalizován a poměrně brzy odhalí, že daná zkoušená větev nepovede k řešení) je prakticky nemožné najít počítačem ohodnocení pro graf s více než 30 vrcholy.

Speciální případy jsou uvedeny v přehledové tabulce a jejich obrázky jsou uvedeny v *Příloze*.

6.1 Konstrukce A

Tuto konstrukci používáme ke konstruování některých speciálních případů, které nepostihuje konstrukce popisovaná v článku. V této konstrukci konstruujeme pro $(n - p)$ -pravidelný graf, kde $p \in \{5, 7, 9\}$ komponentu o $3(p - 2)$ vrcholech a k ní přidáváme několik komponent K_p . Slabá stránka této konstrukce je ta, že oněch několik komponent K_p musíme hledat vždy znova, nelze zde uplatnit indukční postup přidávání komponent jako u nalezené konstrukce.

6.2 Konstrukce B

Konstrukce B se podobá konstrukci A . Liší se však v tom, že komponentu na 16, nebo 18 vrcholech s některými vynechanými vrcholy neumíme nalézt ručně, ale musíme ji nalézt počítačem. K ní poté přidáme několik komponent K_p .

Třída	Pravidelnost	Vrcholy	Nalezeno?
$12k + 7$	14	19	Počítačem
	26	31	Počítačem, Konstrukcí <i>B</i>
	38	43	Konstrukcí <i>A</i>
$12k + 9$	16	21	Počítačem, Konstrukcí <i>B</i>
	28	33	Konstrukcí <i>A</i>
$12k + 11$	18	23	Počítačem, Konstrukcí <i>A</i>
$12k + 1$	6	13	Počítačem
	18	25	Počítačem
	30	37	Konstrukcí <i>A</i>
$12k + 3$	8	15	Počítačem
$12k + 5$	10	17	Počítačem
	22	29	Počítačem
$12k + 11$	16	23	Počítačem
$20k + 3$	14	23	Počítačem
	34	43	Úpravou obecné konstrukce
$20k + 5$	16	25	Počítačem
$20k + 11$	22	31	Počítačem
$20k + 15$	6	15	Počítačem
	26	35	Úpravou obecné konstrukce
$20k + 17$	8	17	Počítačem
$20k + 19$	10	19	Počítačem

Obrázek 6.1: Tabulka speciálních případů

Závěr

Práce pokrývá ohodnocení pro všechny $(n - 5)$ -pravidelné grafy pro liché $n > 13$, $(n - 7)$ -pravidelné grafy pro liché $n > 11$ a $(n - 9)$ -pravidelné grafy pro liché $n > 13$. Vzhledem k tomu, že se jednalo o otevřené problémy z magických ohodnocení, je toto velice pozitivní výsledek a vznikne na základě této práce článek v odborném matematickém časopise.

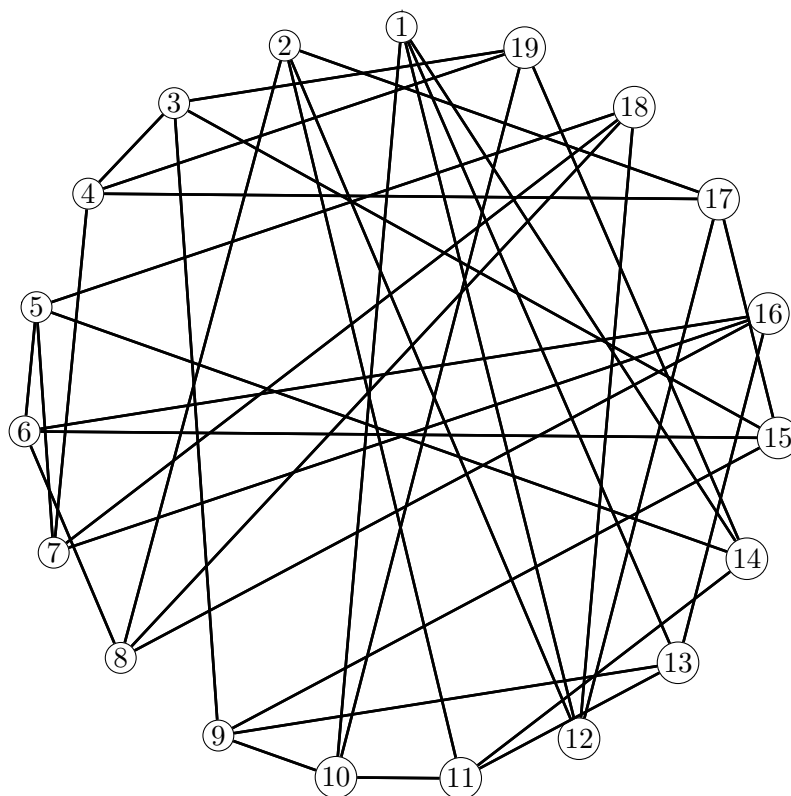
Na konstrukcích a hledání speciálních případů jsem pracoval asi tři čtvrtě roku a dalo mi to hodně. Značně se rozšířila moje představa o diskrétní matematice a teorii grafů, dostal jsem se do zajímavého a podnětného akademického prostředí a mohl jsem se věnovat zábavnému a vsutku magickému tématu nad rámec středoškolské matematiky.

V nejbližší budoucnosti se hodlám zabývat $(n - 11)$ -pravidelnými grafy, magickým ohodnocením hyperkrychlí řádu $4k + 2$, a dalšími vyššími třídami $(n - l)$ -pravidelných grafů. Možná, že se podaří zobecnit tuto nalezenou metodu a vyřešit pomocí ní $(n - k)$ -pravidelné striktně antimagické grafy.

Příloha – Grafy speciálních případů

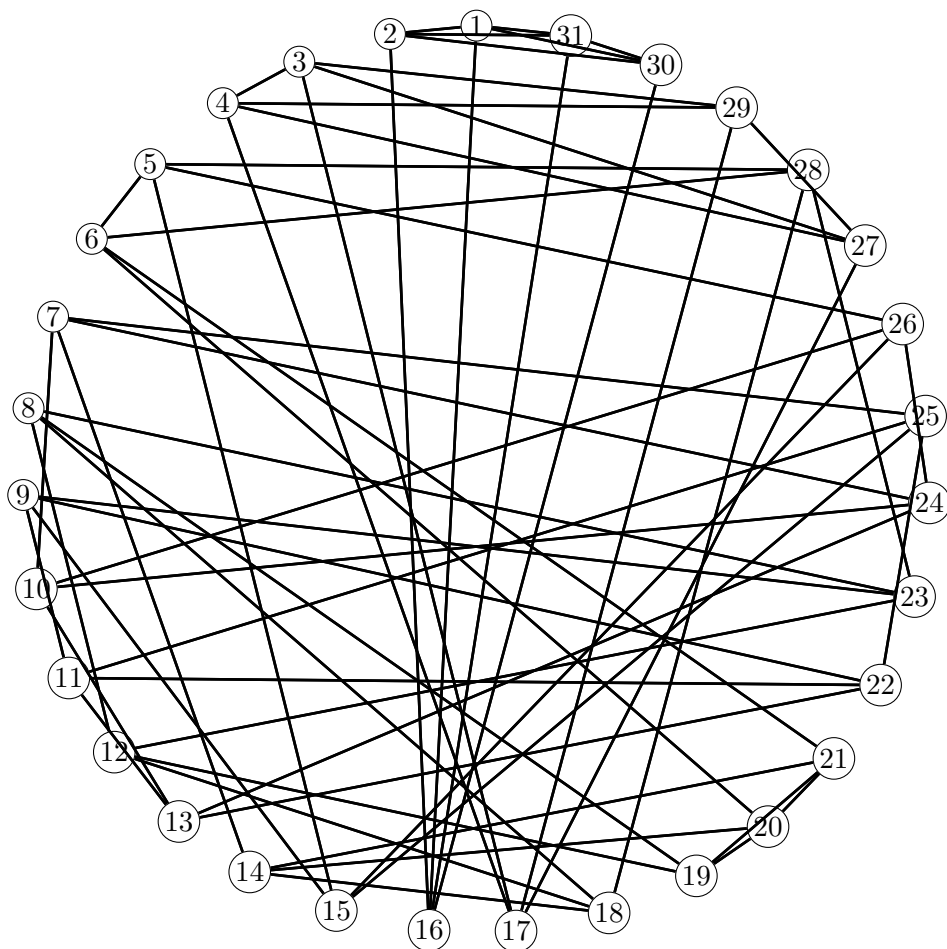
Pro úsporu místa uvádím většinu $(n - 9)$ -pravidelných grafů jen v textové formě, jelikož grafická forma nepřidává hodnotu, jedná-li se o grafy vygenerované počítačem.

<p>1: 2, 3, 4, 12, 20, 21, 22, 23 2: 1, 3, 4, 12, 20, 21, 22, 23 3: 1, 2, 4, 12, 20, 21, 22, 23 4: 1, 2, 3, 13, 19, 21, 22, 23 5: 6, 7, 8, 11, 16, 17, 18, 20 6: 5, 9, 10, 11, 14, 16, 18, 19 7: 5, 8, 11, 13, 14, 15, 16, 19 8: 5, 7, 9, 10, 15, 17, 18, 19 9: 6, 8, 10, 13, 14, 15, 16, 17 10: 6, 8, 9, 12, 13, 15, 17, 18 11: 5, 6, 7, 13, 14, 15, 17, 20 12: 1, 2, 3, 10, 14, 21, 22, 23 13: 4, 7, 9, 10, 11, 17, 18, 19 14: 6, 7, 9, 11, 12, 15, 16, 18 15: 7, 8, 9, 10, 11, 14, 16, 18 16: 5, 6, 7, 9, 14, 15, 17, 19 17: 5, 8, 9, 10, 11, 13, 16, 19 18: 5, 6, 8, 10, 13, 14, 15, 19 19: 4, 6, 7, 8, 13, 16, 17, 18 20: 1, 2, 3, 5, 11, 21, 22, 23 21: 1, 2, 3, 4, 12, 20, 22, 23 22: 1, 2, 3, 4, 12, 20, 21, 23 23: 1, 2, 3, 4, 12, 20, 21, 22</p> <p>8-pravidelný striktně antimagický na 23 vrcholech</p>	<p>1: 5, 8, 11, 12, 13, 20, 22, 25 2: 3, 4, 5, 13, 21, 22, 23, 24 3: 2, 4, 5, 13, 21, 22, 23, 24 4: 2, 3, 6, 9, 21, 23, 24, 25 5: 1, 2, 3, 16, 21, 22, 23, 24 6: 4, 7, 10, 14, 15, 17, 19, 25 7: 6, 10, 11, 12, 14, 18, 19, 20 8: 1, 9, 14, 15, 16, 17, 18, 19 9: 4, 8, 10, 15, 16, 17, 18, 20 10: 6, 7, 9, 14, 15, 17, 18, 21 11: 1, 7, 12, 15, 16, 17, 18, 20 12: 1, 7, 11, 13, 16, 18, 19, 20 13: 1, 2, 3, 12, 14, 23, 24, 25 14: 6, 7, 8, 10, 13, 15, 19, 25 15: 6, 8, 9, 10, 11, 14, 19, 25 16: 5, 8, 9, 11, 12, 17, 19, 20 17: 6, 8, 9, 10, 11, 16, 18, 22 18: 7, 8, 9, 10, 11, 12, 17, 25 19: 6, 7, 8, 12, 14, 15, 16, 20 20: 1, 7, 9, 11, 12, 16, 19, 22 21: 2, 3, 4, 5, 10, 23, 24, 25 22: 1, 2, 3, 5, 17, 20, 23, 24 23: 2, 3, 4, 5, 13, 21, 22, 24 24: 2, 3, 4, 5, 13, 21, 22, 23 25: 1, 4, 6, 13, 14, 15, 18, 21</p> <p>8-pravidelný striktně antimagický na 25 vrcholech</p>	<p>1: 2, 3, 4, 16, 28, 29, 30, 31 2: 1, 3, 4, 16, 28, 29, 30, 31 3: 1, 2, 4, 16, 28, 29, 30, 31 4: 1, 2, 3, 16, 28, 29, 30, 31 5: 6, 7, 8, 17, 23, 25, 26, 27 6: 5, 7, 8, 17, 23, 25, 26, 27 7: 5, 6, 9, 15, 24, 25, 26, 27 8: 5, 6, 13, 20, 21, 22, 24, 25 9: 7, 11, 12, 15, 18, 19, 26, 27 10: 11, 12, 14, 15, 18, 19, 21, 24 11: 9, 10, 13, 14, 20, 21, 22, 24 12: 9, 10, 14, 17, 18, 19, 21, 24 13: 8, 11, 14, 15, 18, 20, 22, 23 14: 10, 11, 12, 13, 19, 20, 22, 23 15: 7, 9, 10, 13, 17, 20, 26, 27 16: 1, 2, 3, 4, 28, 29, 30, 31 17: 5, 6, 12, 15, 19, 22, 23, 25 18: 9, 10, 12, 13, 19, 20, 21, 22 19: 9, 10, 12, 14, 17, 18, 21, 24 20: 8, 11, 13, 14, 15, 18, 22, 23 21: 8, 10, 11, 12, 18, 19, 22, 23 22: 8, 11, 13, 14, 17, 18, 20, 21 23: 5, 6, 13, 14, 17, 20, 21, 25 24: 7, 8, 10, 11, 12, 19, 26, 27 25: 5, 6, 7, 8, 17, 23, 26, 27 26: 5, 6, 7, 9, 15, 24, 25, 27 27: 5, 6, 7, 9, 15, 24, 25, 26 28: 1, 2, 3, 4, 16, 28, 30, 31 29: 1, 2, 3, 4, 16, 28, 30, 31 30: 1, 2, 3, 4, 16, 28, 29, 31 31: 1, 2, 3, 4, 16, 28, 29, 30</p> <p>8-pravidelný striktně antimagický na 31 vrcholech</p>
<p>1: 3, 4, 5, 7, 11, 12, 14, 15 2: 4, 5, 6, 8, 9, 10, 13, 15 3: 1, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 14 4: 1, 2, 5, 9, 11, 12, 13, 15 5: 1, 2, 4, 9, 11, 12, 13, 15 6: 2, 3, 7, 8, 9, 10, 13, 14 7: 1, 3, 6, 8, 10, 11, 12, 14 8: 2, 3, 6, 7, 9, 10, 13, 14 9: 2, 4, 5, 6, 8, 10, 13, 15 10: 2, 3, 6, 7, 8, 9, 13, 14 11: 1, 3, 4, 5, 7, 12, 14, 15 12: 1, 3, 4, 5, 7, 11, 14, 15 13: 2, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 15 14: 1, 3, 6, 7, 8, 10, 11, 12 15: 1, 2, 4, 5, 9, 11, 12, 13</p> <p>8-pravidelný striktně antimagický na 13 vrcholech</p>	<p>1: 2, 3, 4, 9, 14, 15, 16, 17 2: 1, 3, 5, 8, 14, 15, 16, 17 3: 1, 2, 6, 11, 12, 13, 16, 17 4: 1, 6, 7, 9, 10, 11, 16, 17 5: 2, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 15 6: 3, 4, 7, 10, 11, 12, 13, 15 7: 4, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 15 8: 2, 5, 7, 9, 11, 12, 13, 14 9: 1, 4, 5, 8, 10, 13, 14, 17 10: 4, 5, 6, 7, 9, 11, 13, 16 11: 3, 4, 6, 8, 10, 12, 13, 14 12: 3, 5, 6, 7, 8, 11, 14, 15 13: 3, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 16 14: 1, 2, 7, 8, 9, 11, 12, 17 15: 1, 2, 5, 6, 7, 12, 16, 17 16: 1, 2, 3, 4, 10, 13, 15, 17 17: 1, 2, 3, 4, 9, 14, 15, 16</p> <p>8-pravidelný striktně antimagický na 17 vrcholech</p>	<p>1: 3, 5, 9, 10, 12, 14, 17, 19 2: 3, 4, 5, 10, 15, 16, 17, 18 3: 1, 2, 5, 11, 15, 16, 18, 19 4: 2, 6, 7, 8, 13, 15, 17, 18 5: 1, 2, 3, 13, 15, 16, 17, 18 6: 4, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 19 7: 4, 6, 8, 10, 11, 13, 15, 16 8: 4, 6, 7, 9, 11, 12, 14, 19 9: 1, 6, 8, 10, 12, 13, 14, 17 10: 1, 2, 7, 9, 11, 13, 18, 19 11: 3, 6, 7, 8, 10, 12, 14, 19 12: 1, 6, 8, 9, 11, 13, 14, 16 13: 4, 5, 7, 9, 10, 12, 14, 16 14: 1, 6, 8, 9, 11, 12, 13, 16 15: 2, 3, 4, 5, 7, 17, 18, 19 16: 2, 3, 5, 7, 12, 13, 14, 18 17: 1, 2, 4, 5, 9, 15, 18, 19 18: 2, 3, 4, 5, 10, 15, 16, 17 19: 1, 3, 6, 8, 10, 11, 15, 17</p> <p>8-pravidelný striktně antimagický na 19 vrcholech</p>



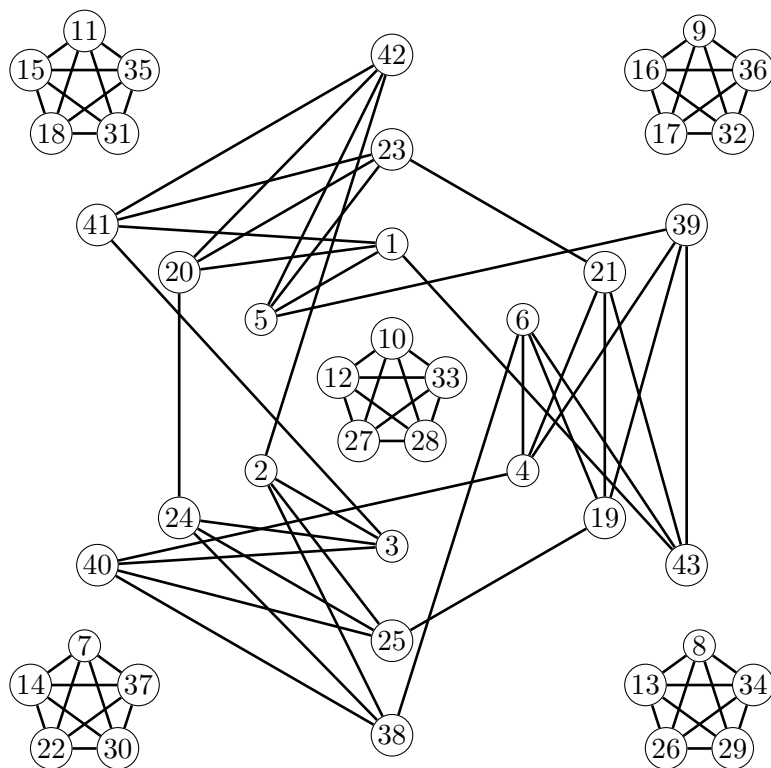
Obrázek 6.2: 4-pravidelný striktně antimagický graf na 19 vrcholech

- 1: 1, 10, 12, 13, 14
- 2: 2, 8, 11, 12, 17
- 3: 3, 4, 9, 15, 19
- 4: 3, 4, 7, 17, 19
- 5: 5, 6, 7, 14, 18
- 6: 5, 6, 8, 15, 16
- 7: 4, 5, 7, 16, 18
- 8: 2, 6, 8, 16, 18
- 9: 3, 9, 10, 13, 15
- 10: 1, 9, 10, 11, 19
- 11: 2, 10, 11, 13, 14
- 12: 1, 2, 12, 17, 18
- 13: 1, 9, 11, 13, 16
- 14: 1, 5, 11, 14, 19
- 15: 3, 6, 9, 15, 17
- 16: 6, 7, 8, 13, 16
- 17: 2, 4, 12, 15, 17
- 18: 5, 7, 8, 12, 18
- 19: 3, 4, 10, 14, 19



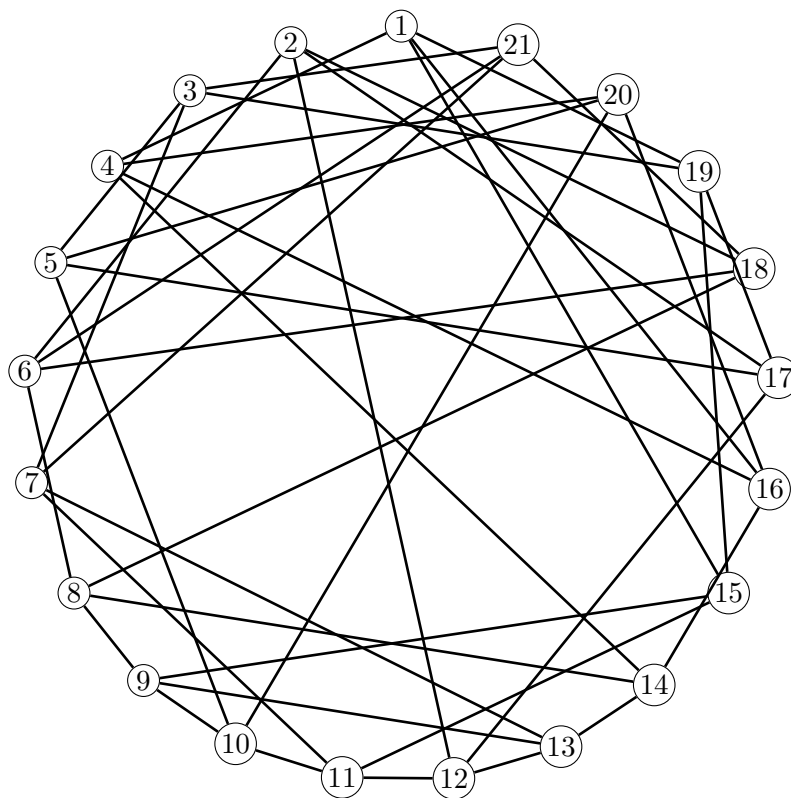
Obrázek 6.3: 4-pravidelný striktně antimagický graf na 31 vrcholech

1: 2, 16, 30, 31	17: 3, 4, 27, 29
2: 1, 16, 30, 31	18: 8, 12, 14, 28
3: 4, 17, 27, 29	19: 8, 12, 20, 21
4: 3, 17, 27, 29	20: 6, 14, 19, 21
5: 6, 15, 26, 28	21: 6, 14, 19, 20
6: 5, 20, 21, 28	22: 9, 11, 13, 25
7: 10, 14, 24, 25	23: 8, 9, 12, 28
8: 12, 18, 19, 23	24: 7, 10, 13, 26
9: 11, 15, 22, 23	25: 7, 11, 15, 22
10: 7, 13, 24, 26	26: 5, 10, 15, 24
11: 9, 13, 22, 25	27: 3, 4, 17, 29
12: 8, 18, 19, 23	28: 5, 6, 18, 23
13: 10, 11, 22, 24	29: 3, 4, 17, 27
14: 7, 18, 20, 21	30: 1, 2, 16, 31
15: 5, 9, 25, 26	31: 1, 2, 16, 30
16: 1, 2, 30, 31	



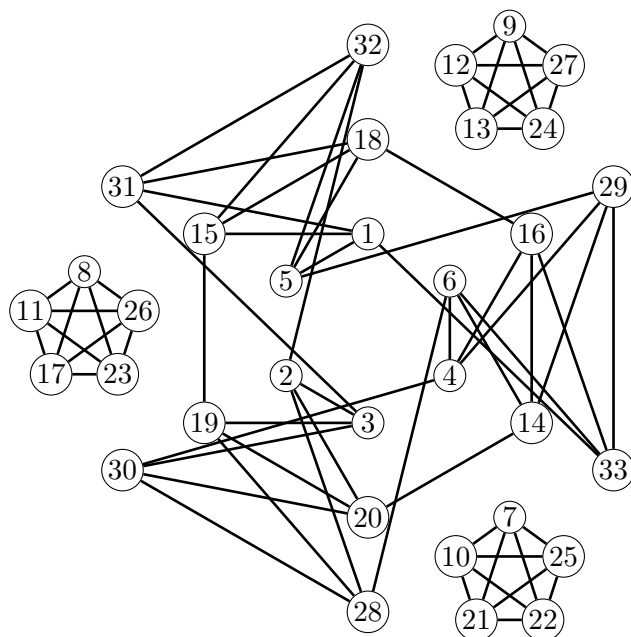
Obrázek 6.4: 4-pravidelný striktně antimagický graf na 43 vrcholech

1: 5, 20, 41, 43	23: 5, 20, 41, 21
2: 3, 25, 38, 42	24: 3, 25, 38, 20
3: 2, 24, 40, 41	25: 2, 24, 40, 19
4: 6, 21, 39, 40	26: 8, 13, 29, 34
5: 1, 23, 42, 39	27: 10, 12, 28, 33
6: 4, 19, 43, 38	28: 10, 12, 27, 33
7: 14, 22, 30, 37	29: 8, 13, 26, 34
8: 13, 26, 29, 34	30: 7, 14, 22, 37
9: 16, 17, 32, 36	31: 11, 15, 18, 35
10: 12, 27, 28, 33	32: 9, 16, 17, 36
11: 15, 18, 31, 35	33: 10, 12, 27, 28
12: 10, 27, 28, 33	34: 8, 13, 26, 29
13: 8, 26, 29, 34	35: 11, 15, 18, 31
14: 7, 22, 30, 37	36: 9, 16, 17, 32
15: 11, 18, 31, 35	37: 7, 14, 22, 30
16: 9, 17, 32, 36	38: 2, 24, 40, 6
17: 9, 16, 32, 36	39: 4, 19, 43, 5
18: 11, 15, 31, 35	40: 3, 25, 38, 4
19: 6, 21, 39, 25	41: 1, 23, 42, 3
20: 1, 23, 42, 24	42: 5, 20, 41, 2
21: 4, 19, 43, 23	43: 6, 21, 39, 1
22: 7, 14, 30, 37	



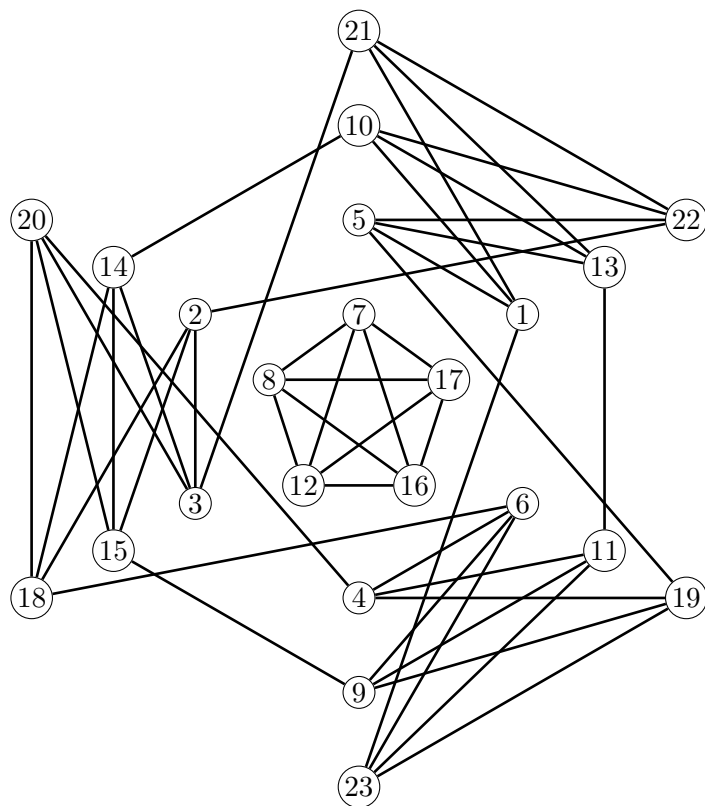
Obrázek 6.5: 4-pravidelný striktně antimagický graf na 21 vrcholech

- 1: 4, 15, 16, 19
- 2: 6, 12, 17, 18
- 3: 5, 7, 19, 21
- 4: 1, 14, 16, 20
- 5: 3, 10, 17, 20
- 6: 2, 8, 18, 21
- 7: 3, 11, 13, 21
- 8: 6, 9, 14, 18
- 9: 8, 10, 13, 15
- 10: 5, 9, 11, 20
- 11: 7, 10, 12, 15
- 12: 2, 11, 13, 17
- 13: 7, 9, 12, 14
- 14: 4, 8, 13, 16
- 15: 1, 9, 11, 19
- 16: 1, 4, 14, 20
- 17: 2, 5, 12, 19
- 18: 2, 6, 8, 21
- 19: 1, 3, 15, 17
- 21: 3, 6, 7, 18
- 20: 4, 5, 10, 16



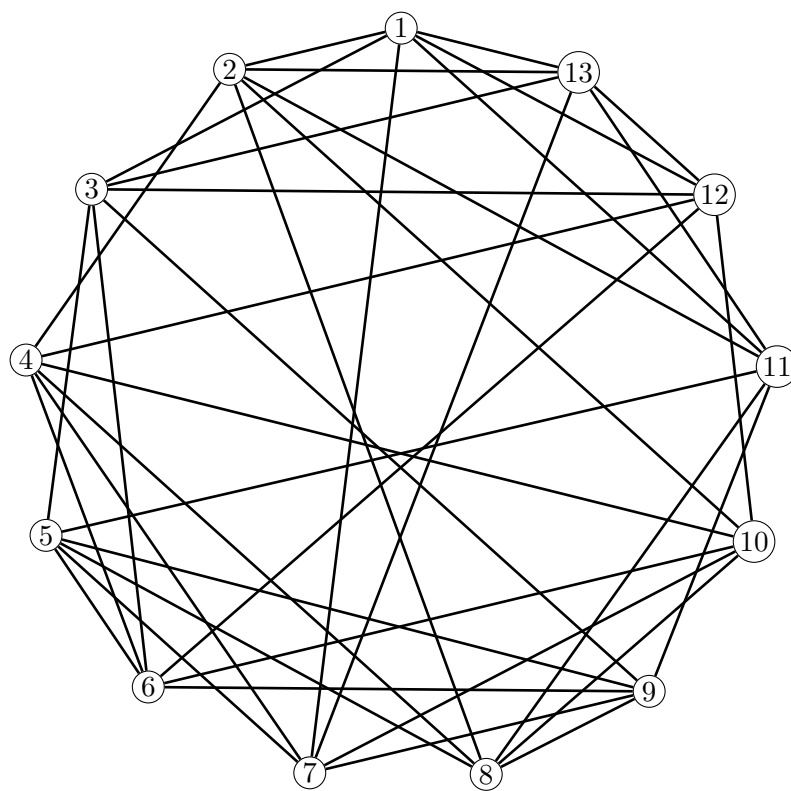
Obrázek 6.6: 4-pravidelný striktně antimagický graf na 33 vrcholech

1:	5, 15, 31, 33	18:	5, 15, 31, 16
2:	3, 20, 28, 32	19:	3, 20, 28, 15
3:	2, 19, 30, 31	20:	2, 19, 30, 14
4:	6, 16, 29, 30	21:	7, 10, 22, 25
5:	1, 18, 32, 29	22:	7, 10, 21, 25
6:	4, 14, 33, 28	23:	8, 11, 17, 26
7:	10, 21, 22, 25	24:	9, 12, 13, 27
8:	11, 17, 23, 26	25:	7, 10, 21, 22
9:	12, 13, 24, 27	26:	8, 11, 17, 23
10:	7, 21, 22, 25	27:	9, 12, 13, 24
11:	8, 17, 23, 26	28:	2, 19, 30, 6
12:	9, 13, 24, 27	29:	4, 14, 33, 5
13:	9, 12, 24, 27	30:	3, 20, 28, 4
14:	6, 16, 29, 20	31:	1, 18, 32, 3
15:	1, 18, 32, 19	32:	5, 15, 31, 2
16:	4, 14, 33, 18	33:	6, 16, 29, 1
17:	8, 11, 23, 26		



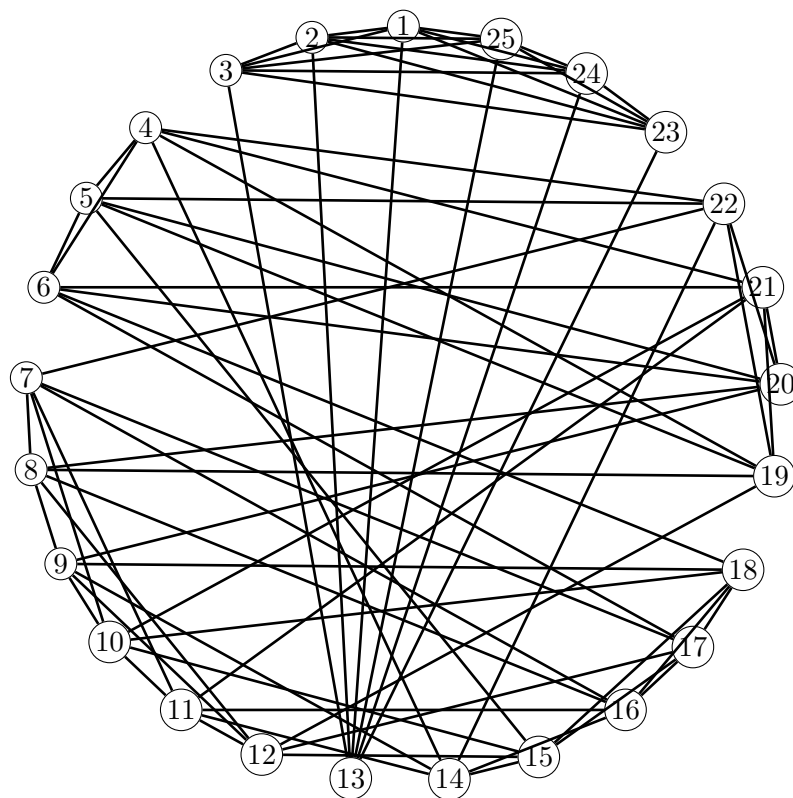
Obrázek 6.7: 4-pravidelný striktně antimagický graf na 23 vrcholech

1:	5, 10, 21, 23	13:	5, 10, 21, 11
2:	3, 15, 18, 6	14:	3, 15, 18, 10
3:	2, 14, 20, 21	15:	2, 14, 20, 9
4:	6, 11, 19, 20	16:	7, 8, 12, 17
5:	1, 13, 22, 19	17:	7, 8, 12, 16
6:	4, 9, 23, 18	18:	2, 14, 20, 6
7:	8, 12, 16, 17	19:	4, 9, 23, 5
8:	7, 12, 16, 17	20:	3, 15, 18, 4
9:	6, 11, 19, 15	21:	1, 13, 22, 3
10:	1, 13, 22, 14	22:	5, 10, 21, 2
11:	4, 9, 23, 13	23:	6, 11, 19, 1
12:	7, 8, 16, 17		



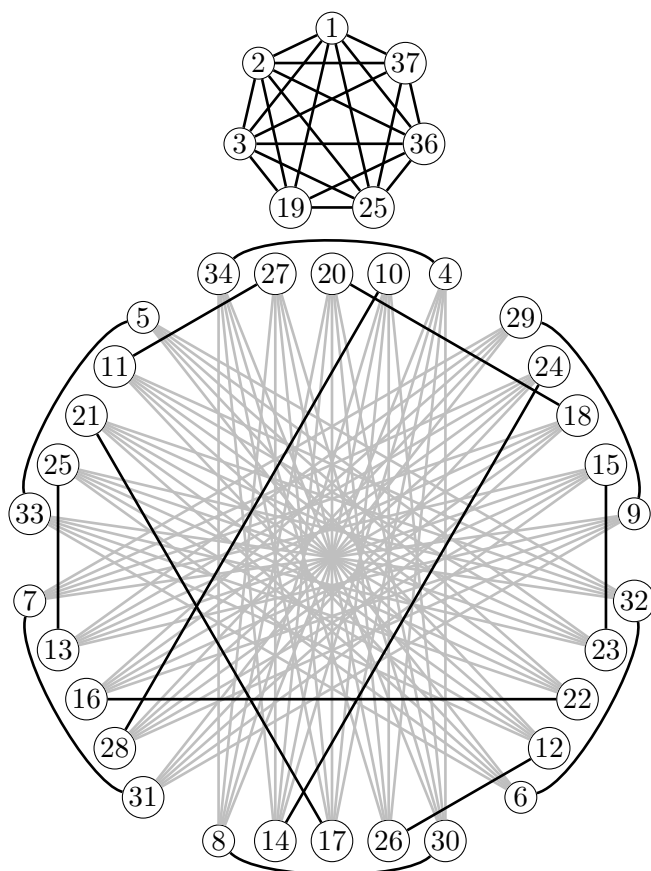
Obrázek 6.8: 6-pravidelný striktně antimagický graf na 13 vrcholech

- 1: 2, 3, 7, 11, 12, 13
- 2: 1, 4, 8, 10, 11, 13
- 3: 1, 5, 6, 9, 12, 13
- 4: 2, 6, 7, 8, 10, 12
- 5: 3, 6, 7, 8, 9, 11
- 6: 3, 4, 5, 9, 10, 12
- 7: 1, 4, 5, 9, 10, 13
- 8: 2, 4, 5, 9, 10, 11
- 9: 3, 5, 6, 7, 8, 11
- 10: 2, 4, 6, 7, 8, 12
- 11: 1, 2, 5, 8, 9, 13
- 12: 1, 3, 4, 6, 10, 13
- 13: 1, 2, 3, 7, 11, 12



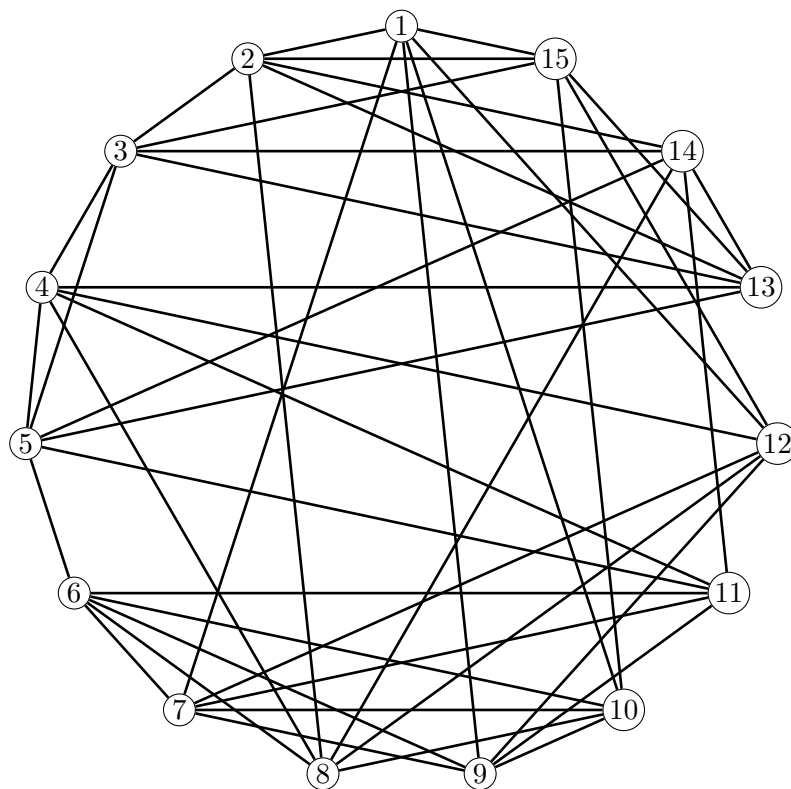
Obrázek 6.9: 6-pravidelný striktně antimagický graf na 25 vrcholech

1: 2, 3, 13, 23, 24, 25	14: 4, 9, 11, 15, 16, 22
2: 1, 3, 13, 23, 24, 25	15: 5, 10, 12, 14, 17, 18
3: 1, 2, 13, 23, 24, 25	16: 7, 8, 11, 14, 17, 18
4: 5, 6, 14, 19, 21, 22	17: 6, 7, 12, 15, 16, 18
5: 4, 6, 15, 19, 20, 22	18: 6, 9, 10, 15, 16, 17
6: 4, 5, 17, 18, 20, 21	19: 4, 5, 8, 12, 21, 22
7: 8, 10, 11, 16, 17, 22	20: 5, 6, 8, 9, 21, 22
8: 7, 9, 12, 16, 19, 20	21: 4, 6, 10, 11, 19, 20
9: 8, 10, 12, 14, 18, 20	22: 4, 5, 7, 14, 19, 20
10: 7, 9, 11, 15, 18, 21	23: 1, 2, 3, 13, 24, 25
11: 7, 10, 12, 14, 16, 21	24: 1, 2, 3, 13, 23, 25
12: 8, 9, 11, 15, 17, 19	25: 1, 2, 3, 13, 23, 24
13: 1, 2, 3, 23, 24, 25	



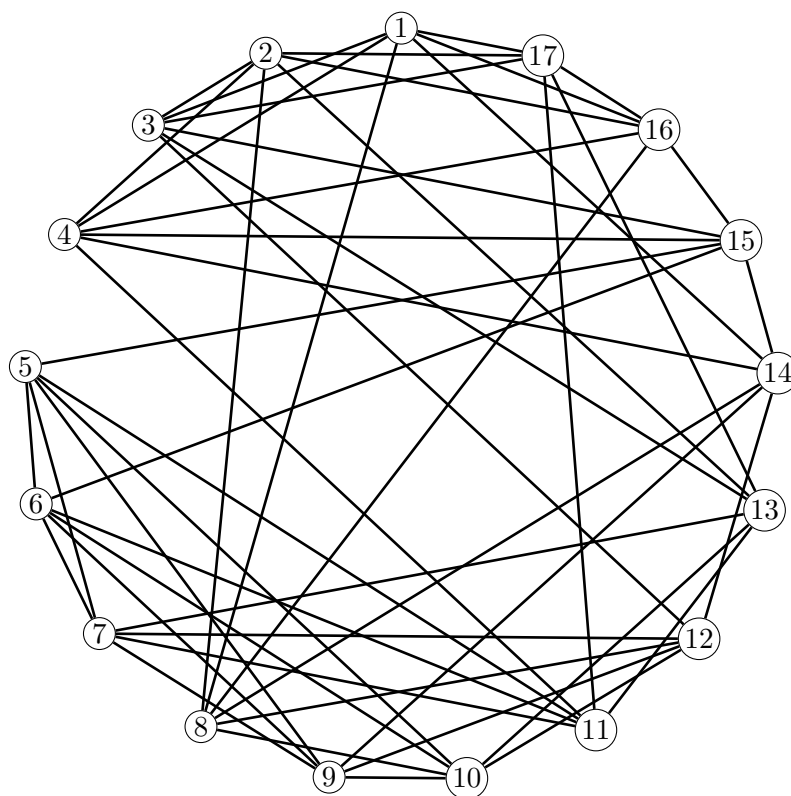
Obrázek 6.10: 6-pravidelný striktně antimagický graf na 37 vrcholech

1:	2, 3, 19, 35, 36, 37	20:	8, 14, 17, 26, 30, 18
2:	1, 3, 19, 35, 36, 37	21:	6, 12, 22, 23, 32, 17
3:	1, 2, 19, 35, 36, 37	22:	5, 11, 21, 25, 33, 16
4:	8, 14, 17, 26, 30, 34	23:	5, 11, 21, 25, 33, 15
5:	6, 12, 22, 23, 32, 33	24:	7, 13, 16, 28, 31, 14
6:	5, 11, 21, 25, 33, 32	25:	6, 12, 22, 23, 32, 13
7:	9, 15, 18, 24, 29, 31	26:	4, 10, 20, 27, 34, 12
8:	4, 10, 20, 27, 34, 30	27:	8, 14, 17, 26, 30, 11
9:	7, 13, 16, 28, 31, 29	28:	9, 15, 18, 24, 29, 10
10:	8, 14, 17, 26, 30, 28	29:	7, 13, 16, 28, 31, 9
11:	6, 12, 22, 23, 32, 27	30:	4, 10, 20, 27, 34, 8
12:	5, 11, 21, 25, 33, 26	31:	9, 15, 18, 24, 29, 7
13:	9, 15, 18, 24, 29, 25	32:	5, 11, 21, 25, 33, 6
14:	4, 10, 20, 27, 34, 24	33:	6, 12, 22, 23, 32, 5
15:	7, 13, 16, 28, 31, 23	34:	8, 14, 17, 26, 30, 4
16:	9, 15, 18, 24, 29, 22	35:	1, 2, 3, 19, 36, 37
17:	4, 10, 20, 27, 34, 21	36:	1, 2, 3, 19, 35, 37
18:	7, 13, 16, 28, 31, 20	37:	1, 2, 3, 19, 35, 36
19:	1, 2, 3, 35, 36, 37		



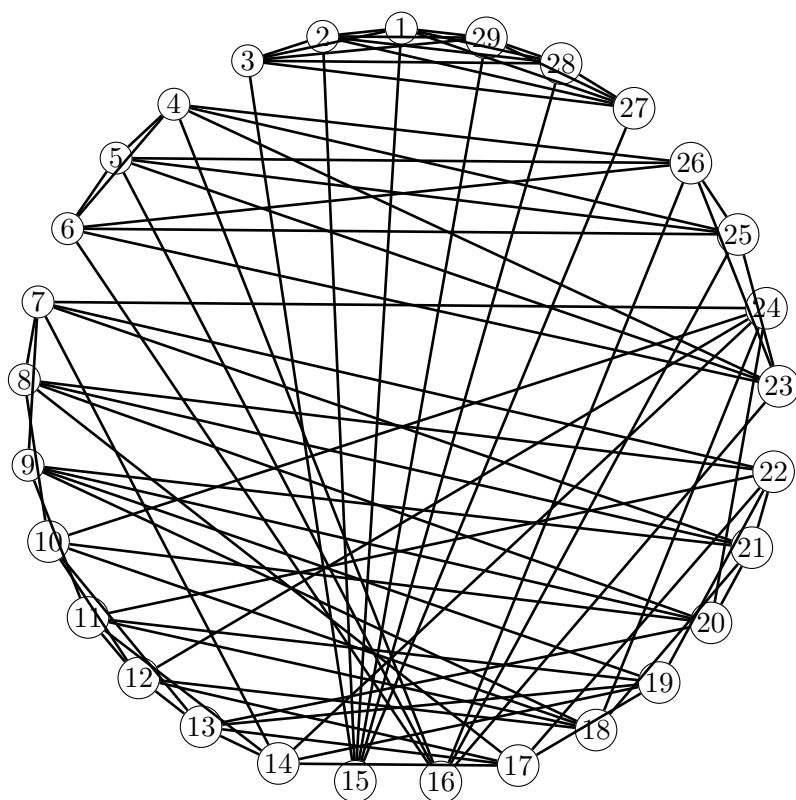
Obrázek 6.11: 6-pravidelný striktně antimagický graf na 15 vrcholech

- 1: 2, 7, 9, 10, 12, 15
- 2: 1, 3, 8, 13, 14, 15
- 3: 2, 4, 5, 13, 14, 15
- 4: 3, 5, 8, 11, 12, 13
- 5: 3, 4, 6, 11, 13, 14
- 6: 5, 7, 8, 9, 10, 11
- 7: 1, 6, 9, 10, 11, 12
- 8: 2, 4, 6, 10, 12, 14
- 9: 1, 6, 7, 10, 11, 12
- 10: 1, 6, 7, 8, 9, 15
- 11: 4, 5, 6, 7, 9, 14
- 12: 1, 4, 7, 8, 9, 15
- 13: 2, 3, 4, 5, 14, 15
- 14: 2, 3, 5, 8, 11, 13
- 15: 1, 2, 3, 10, 12, 13



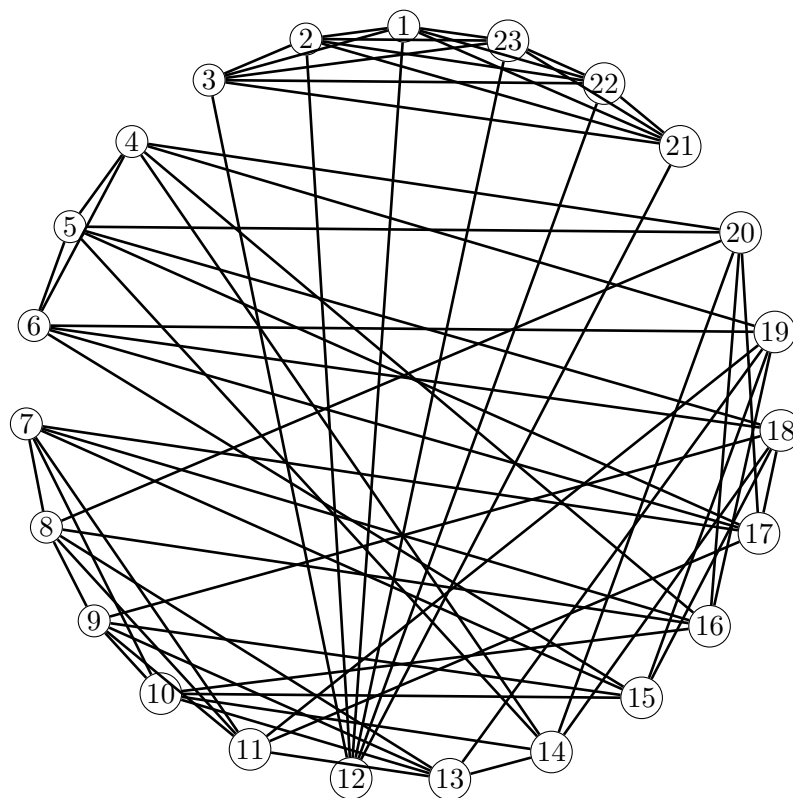
Obrázek 6.12: 6-pravidelný striktně antimagický graf na 17 vrcholech

- 1: 3, 4, 8, 14, 16, 17
- 2: 3, 4, 8, 13, 16, 17
- 3: 1, 2, 12, 13, 15, 17
- 4: 1, 2, 11, 14, 15, 16
- 5: 6, 7, 9, 10, 11, 15
- 6: 5, 7, 9, 10, 11, 15
- 7: 5, 6, 9, 11, 12, 13
- 8: 1, 2, 10, 12, 14, 16
- 9: 5, 6, 7, 10, 12, 14
- 10: 5, 6, 8, 9, 12, 13
- 11: 4, 5, 6, 7, 13, 17
- 12: 3, 7, 8, 9, 10, 14
- 13: 2, 3, 7, 10, 11, 17
- 14: 1, 4, 8, 9, 12, 15
- 15: 3, 4, 5, 6, 14, 16
- 16: 1, 2, 4, 8, 15, 17
- 17: 1, 2, 3, 11, 13, 16



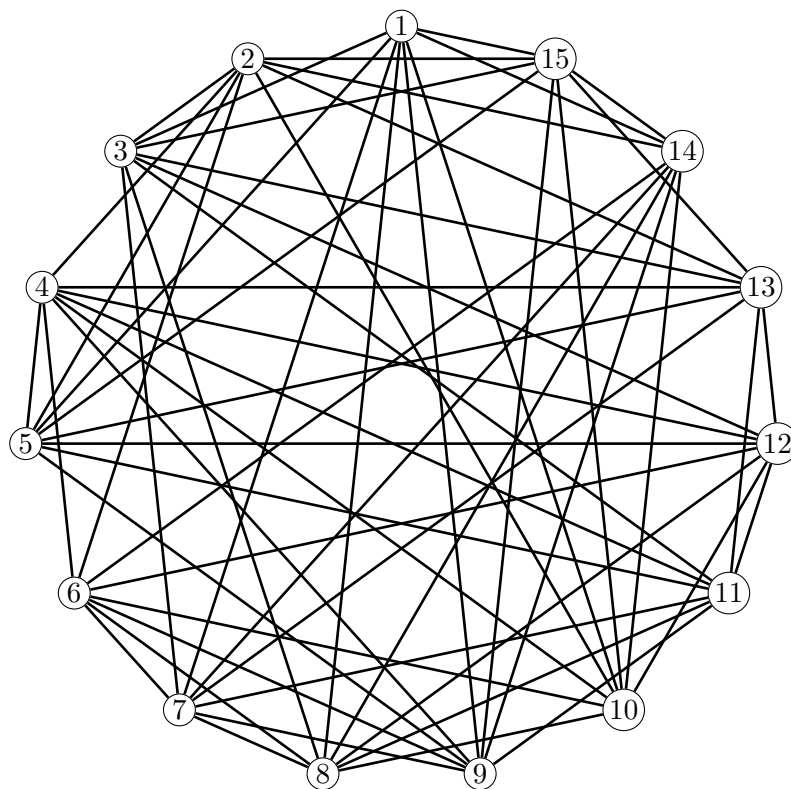
Obrázek 6.13: 6-pravidelný striktně antimagický graf na 29 vrcholech

1: 2, 3, 15, 27, 28, 29	16: 4, 5, 6, 23, 25, 26
2: 1, 3, 15, 27, 28, 29	17: 8, 12, 13, 14, 19, 22
3: 1, 2, 15, 27, 28, 29	18: 9, 10, 11, 12, 21, 24
4: 5, 6, 16, 23, 25, 26	19: 9, 11, 13, 14, 17, 22
5: 4, 6, 16, 23, 25, 26	20: 8, 9, 10, 13, 21, 24
6: 4, 5, 16, 23, 25, 26	21: 7, 8, 9, 18, 20, 22
7: 8, 9, 14, 21, 22, 24	22: 7, 8, 11, 17, 19, 21
8: 7, 10, 17, 20, 21, 22	23: 4, 5, 6, 16, 25, 26
9: 7, 11, 18, 19, 20, 21	24: 7, 10, 12, 14, 18, 20
10: 8, 12, 13, 18, 20, 24	25: 4, 5, 6, 16, 23, 26
11: 9, 12, 14, 18, 19, 22	26: 4, 5, 6, 16, 23, 25
12: 10, 11, 13, 17, 18, 24	27: 1, 2, 3, 15, 28, 29
13: 10, 12, 14, 17, 19, 20	28: 1, 2, 3, 15, 27, 29
14: 7, 11, 13, 17, 19, 24	29: 1, 2, 3, 15, 27, 28
15: 1, 2, 3, 27, 28, 29	



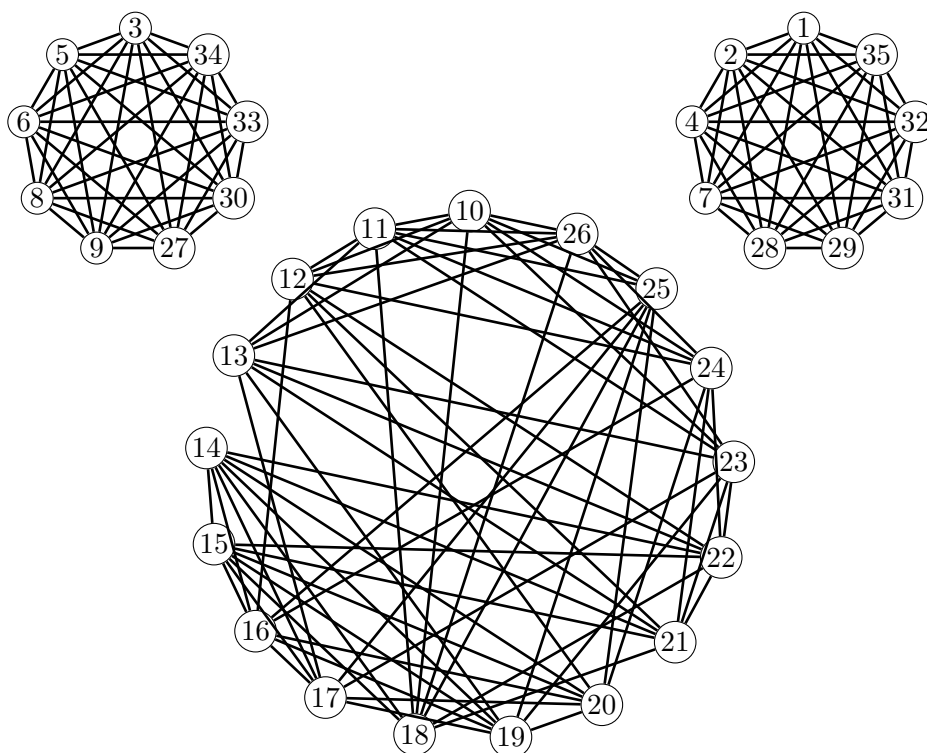
Obrázek 6.14: 6-pravidelný striktně antimagický graf na 23 vrcholech

1: 2, 3, 12, 21, 22, 23	13: 8, 9, 10, 11, 14, 19
2: 1, 3, 12, 21, 22, 23	14: 4, 5, 10, 13, 18, 20
3: 1, 2, 12, 21, 22, 23	15: 6, 7, 9, 10, 18, 19
4: 5, 6, 14, 16, 19, 20	16: 4, 7, 8, 10, 19, 20
5: 4, 6, 14, 17, 18, 20	17: 5, 6, 7, 11, 18, 20
6: 4, 5, 15, 17, 18, 19	18: 5, 6, 9, 14, 15, 17
7: 8, 10, 11, 15, 16, 17	19: 4, 6, 11, 13, 15, 16
8: 7, 9, 11, 13, 16, 20	20: 4, 5, 8, 14, 16, 17
9: 8, 10, 11, 13, 15, 18	21: 1, 2, 3, 12, 22, 23
10: 7, 9, 13, 14, 15, 16	22: 1, 2, 3, 12, 21, 23
11: 7, 8, 9, 13, 17, 19	23: 1, 2, 3, 12, 21, 22
12: 1, 2, 3, 21, 22, 23	



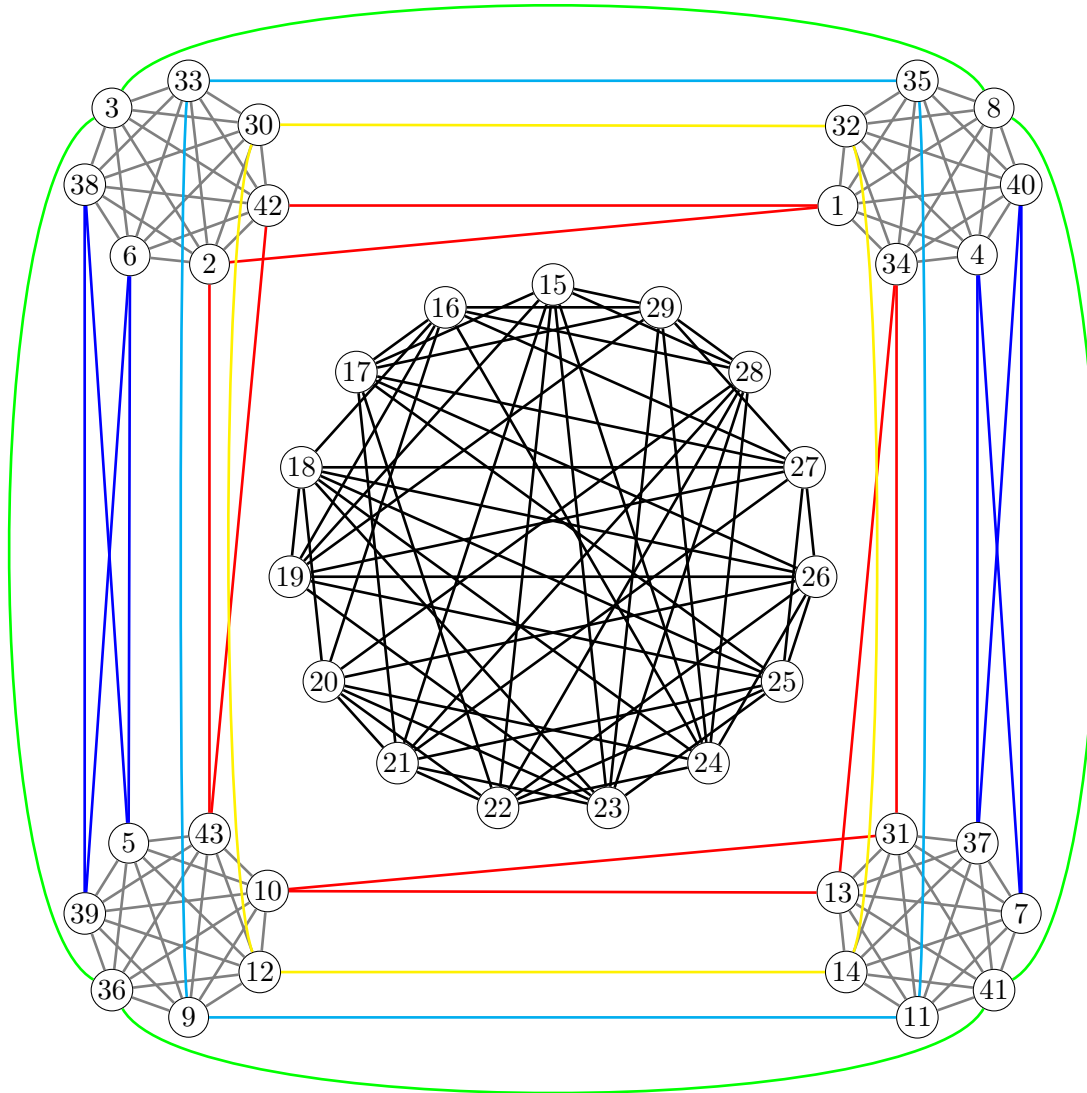
Obrázek 6.15: 8-pravidelný striktně antimagický graf na 15 vrcholech

- 1: 3, 5, 7, 8, 9, 10, 14, 15
- 2: 3, 4, 5, 6, 10, 13, 14, 15
- 3: 1, 2, 7, 8, 11, 12, 13, 15
- 4: 2, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 13
- 5: 1, 2, 4, 9, 11, 12, 13, 15
- 6: 2, 4, 7, 8, 9, 10, 12, 14
- 7: 1, 3, 6, 8, 9, 11, 13, 14
- 8: 1, 3, 6, 7, 10, 11, 12, 14
- 9: 1, 4, 5, 6, 7, 11, 14, 15
- 10: 1, 2, 4, 6, 8, 12, 14, 15
- 11: 3, 4, 5, 7, 8, 9, 12, 13
- 12: 3, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 13
- 13: 2, 3, 4, 5, 7, 11, 12, 15
- 14: 1, 2, 6, 7, 8, 9, 10, 15
- 15: 1, 2, 3, 5, 9, 10, 13, 14



Obrázek 6.16: 8-pravidelný striktně antimagický graf na 35 vrcholech

1: 2, 4, 7, 28, 29, 31, 32, 35	19: 13, 14, 15, 16, 17, 20, 23, 25
2: 1, 4, 7, 28, 29, 31, 32, 35	20: 12, 14, 15, 16, 17, 19, 24, 25
3: 5, 6, 8, 9, 27, 30, 33, 34	21: 12, 13, 14, 15, 18, 22, 23, 24
4: 1, 2, 7, 28, 29, 31, 32, 35	22: 12, 13, 14, 15, 18, 21, 23, 24
5: 3, 6, 8, 9, 27, 30, 33, 34	23: 10, 11, 13, 17, 19, 21, 22, 26
6: 3, 5, 8, 9, 27, 30, 33, 34	24: 10, 11, 12, 16, 20, 21, 22, 26
7: 1, 2, 4, 28, 29, 31, 32, 35	25: 10, 11, 16, 17, 18, 19, 20, 26
8: 3, 5, 6, 9, 27, 30, 33, 34	26: 10, 11, 12, 13, 18, 23, 24, 25
9: 3, 5, 6, 8, 27, 30, 33, 34	27: 3, 5, 6, 8, 9, 30, 33, 34
10: 11, 12, 13, 18, 23, 24, 25, 26	28: 1, 2, 4, 7, 29, 31, 32, 35
11: 10, 12, 13, 18, 23, 24, 25, 26	29: 1, 2, 4, 7, 28, 31, 32, 35
12: 10, 11, 16, 20, 21, 22, 24, 26	30: 3, 5, 6, 8, 9, 27, 33, 34
13: 10, 11, 17, 19, 21, 22, 23, 26	31: 1, 2, 4, 7, 28, 29, 32, 35
14: 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22	32: 1, 2, 4, 7, 28, 29, 31, 35
15: 14, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22	33: 3, 5, 6, 8, 9, 27, 30, 34
16: 12, 14, 15, 17, 19, 20, 24, 25	34: 3, 5, 6, 8, 9, 27, 30, 33
17: 13, 14, 15, 16, 19, 20, 23, 25	35: 1, 2, 4, 7, 28, 29, 31, 32
18: 10, 11, 14, 15, 21, 22, 25, 26	



Obrázek 6.17: 8-pravidelný striktně antimagický graf na 43 vrcholech

1: 2, 4, 8, 32, 34, 35, 40, 42	16: 17, 18, 19, 20, 24, 27, 28, 29	31: 7, 10, 11, 13, 14, 34, 37, 41
2: 1, 3, 6, 30, 33, 38, 42, 43	17: 15, 16, 21, 22, 25, 26, 27, 29	32: 1, 4, 8, 14, 30, 34, 35, 40
3: 2, 4, 6, 30, 33, 38, 40, 42	18: 16, 19, 20, 23, 24, 25, 26, 27	33: 2, 3, 6, 9, 30, 35, 38, 42
4: 1, 3, 8, 32, 34, 35, 40, 41	19: 15, 16, 18, 23, 25, 26, 27, 29	34: 1, 4, 8, 13, 31, 32, 35, 40
5: 6, 9, 10, 12, 36, 38, 39, 43	20: 16, 18, 21, 22, 23, 24, 26, 28	35: 1, 4, 8, 11, 32, 33, 34, 40
6: 2, 3, 5, 30, 33, 38, 39, 42	21: 15, 17, 20, 22, 23, 25, 27, 28	36: 5, 7, 9, 10, 12, 37, 39, 43
7: 8, 11, 13, 14, 31, 36, 37, 41	22: 15, 17, 20, 21, 24, 25, 26, 28	37: 7, 8, 11, 13, 14, 31, 36, 41
8: 1, 4, 7, 32, 34, 35, 37, 40	23: 15, 18, 19, 20, 21, 25, 28, 29	38: 2, 3, 5, 6, 30, 33, 39, 42
9: 5, 10, 11, 12, 33, 36, 39, 43	24: 15, 16, 18, 20, 22, 26, 28, 29	39: 5, 6, 9, 10, 12, 36, 38, 43
10: 5, 9, 12, 13, 31, 36, 39, 43	25: 17, 18, 19, 21, 22, 23, 26, 27	40: 1, 3, 4, 8, 32, 34, 35, 41
11: 7, 9, 13, 14, 31, 35, 37, 41	26: 17, 18, 19, 20, 22, 24, 25, 27	41: 4, 7, 11, 13, 14, 31, 37, 40
12: 5, 9, 10, 14, 30, 36, 39, 43	27: 16, 17, 18, 19, 21, 25, 26, 29	42: 1, 2, 3, 6, 30, 33, 38, 43
13: 7, 10, 11, 14, 31, 34, 37, 41	28: 15, 16, 20, 21, 22, 23, 24, 29	43: 2, 5, 9, 10, 12, 36, 39, 42
14: 7, 11, 12, 13, 31, 32, 37, 41	29: 15, 16, 17, 19, 23, 24, 27, 28	
15: 17, 19, 21, 22, 23, 24, 28, 29	30: 2, 3, 6, 12, 32, 33, 38, 42	